Episódios de Equações Diferenciais, 2015

João Pedro Boavida

APRESENTAÇÃO

Estes apontamentos foram sendo escritos ao longo dos semestres em que dei Análise Complexa e Equações Diferenciais no IST/TagusPark. Na terceira iteração, decidi separar a análise complexa das equações diferenciais. Nesta (a quarta), acrescentei alguns tópicos, figuras e correções. Poderão encontrar informação atualizada em `http://web.tecnico.ulisboa.pt/joao.boavida/2015/ACED/`.

Quis que o resultado final ficasse relativamente curto, pois é fácil ser-se inundado com imensa informação e perder de vista as ideias centrais. Assim, tentei evitar detalhes exagerados e deixei alguns tópicos para os exercícios (isto não significa que esses tópicos são menos importantes; só significa que explicar os detalhes por escrito não ia acrescentar muito àquilo que conseguiriam fazer sozinhos, seguindo os passos sugeridos).

À falta de melhor nome, chamei "episódio" a cada conjunto de apontamentos, correspondente a cerca de uma semana de aulas. Tentei escrever informalmente, como se estivéssemos a conversar (daí usar o plural da primeira pessoa). Como não é um monólogo, como a ideia é que participem ativamente na viagem, deixei algumas perguntas e exercícios pelo caminho. Quando algum exercício for inesperadamente exigente, eu assinalo-o com $\star$.

Ao contrário de análise complexa (em que as ideias centrais são tão surpreendentes que se justifica começar a explorá-las desde logo, em vez de só as descobrir mesmo no final), em equações diferenciais, em geral, a ordem "lógica" coincide com a ordem natural, e por isso eu vou normalmente segui-la. Os dois primeiros episódios são a única exceção relevante: a ordem "lógica" seria começar pelas demonstrações no episódio 2, enquanto que a ordem mais intuitiva é começar pelos exemplos no episódio 1.

Nada do que aqui lerem é original; estas ideias já estavam arrumadas, aproximadamente no formato atual, há mais de meio século.

UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL é uma equação cuja incógnita é uma função $y(t)$ e em que aparecem derivadas de y. Por exemplo,

$$y' - t \cdot y = 0$$

é uma equação diferencial *de primeira ordem* (a "ordem" é a ordem da derivada mais alta que aparece). Substituindo $y(t) = t^2$, podemos verificar que *não* é uma solução, pois

$$(t^2)' - t \cdot (t^2) \neq 0.$$

Por outro lado, $y(t) = 0$ é uma solução, pois

$$(0)' - t \cdot 0 = 0.$$

É comum omitir a variável independente na equação (ou seja, escrever y em vez de $y(t)$). É claro que isso não causa ambiguidade, pois o facto de escrevermos y' sugere imediatamente

que y depende da outra variável, e não o contrário. Por vezes, usamos a notação mais explícita $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, para indicar claramente qual a variável dependente e a variável independente.

Também distinguimos entre *equações diferenciais ordinárias* (EDOs, as que só têm uma variável independente) e as *equações diferenciais parciais* (EDPs, as com mais que uma variável independente, e que portanto envolvem derivadas parciais). Vamos trabalhar quase só com EDOs; só no último episódio é que faremos alguma coisa com EDPs.

À primeira vista, não é nada óbvio como encontrar soluções para uma equação diferencial. É verdade que algumas equações diferenciais podem ser resolvidas de forma relativamente simples; para dar um exemplo extremo, podemos usar integração para resolver

$$y' = t^2, \quad \text{com } y(0) = 2.$$

Aqui, $y(0)$ (ou y noutro ponto específico, se for isso que temos) é a *condição inicial*.

Mas esse método só raramente funciona. Por exemplo, não funciona com a equação

$$xy' - 2yy' + y = 0, \qquad y(0) = 3.$$

O episódio 1 é dedicado a várias estratégias para resolver EDOs de primeira ordem.

É razoável querer um critério simples para determinar *a priori* se uma EDO tem solução, e se, fixada a condição inicial, a solução é única. É que em geral esperamos que, se dois carros começam a viagem lado a lado e as suas velocidades variam da mesma forma ao longo do tempo, então deveriam continuar lado a lado ao longo de toda a viagem. No episódio 2 discutimos um critério.

Se tivermos um sistema como

$$\begin{cases} x_1' = & x_2, \\ x_2' = -42x_1 + 13x_2, \end{cases}$$

podemos escrevê-lo na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -42 & 13 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

obtendo $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Imaginemos que $\mathbf{x} = S\mathbf{u}$ é uma mudança de variável (exigimos em particular que a matriz S seja invertível), permitindo escrever $S\mathbf{u}' = AS\mathbf{u}$. Se escolhermos $J = S^{-1}AS$, temos $SJ = AS$, ou seja, a equação fica $S\mathbf{u}' = SJ\mathbf{u}$ ou (multiplicando à esquerda por S^{-1}, de ambos os lados, e simplificando) $\mathbf{u}' = J\mathbf{u}$. Acontece que todas as matrizes têm uma *forma canónica de Jordan J*, para a qual $\mathbf{u}' = J\mathbf{u}$ é fácil de resolver. A partir dessa solução $\mathbf{u}$, podemos obter a solução $\mathbf{x} = S\mathbf{u}$. No episódio 3 vamos discutir essas e outras EDOs lineares em $\mathbb{R}^n$.

Uma EDO de ordem superior pode ser transformada numa EDO em $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, $f'' - 13f' + 42f = 0$ (a variável independente continua a ser t) pode ser simulada usando $x_1 = f$ e $x_2 = f'$. O sistema fica então

$$\begin{cases} x_1' = f' = x_2, \\ x_2' = f'' = -42f + 13f' = -42x_1 + 13x_2, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -42 & 13 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Obtemos precisamente a mesma equação de há pouco, o que significa que os métodos para equações lineares em $\mathbb{R}^n$ são suficientes para resolver equações de ordem superior. Porém, raramente são convenientes, e por isso no episódio 4 vamos discutir outros métodos, com especial ênfase no método dos aniquiladores.

Entre outras propriedades, a *transformada de Laplace* converte soluções de EDOs de ordem superior em funções no plano complexo com um número finito de polos, e é possível usar o teorema dos resíduos para recuperar a função original. Isto só por si não seria muito interessante. O que é interessante é que a transformada converte equações diferenciais em equações algébricas, mais fáceis de resolver. Vamos falar de tudo isto no episódio 5.

Finalmente, imaginem que querem resolver esta equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

com $0 \leq x \leq 1$ e $t \geq 0$. Como é que alguém poderia resolver uma equação desse género? Na falta de outras ideias, uma opção é tentar encontrar soluções por tentativa e erro. Por exemplo, podemos substituir $u(t,x) = T(t) \cdot X(x)$. Com algum cuidado, acabamos por concluir que

$$X(x) = C_1 \cos(\pi k x) + C_2 \sin(\pi k x), \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}.$$

De facto, para as *condições de fronteira* (isto é, condições para u ou $\frac{\partial u}{\partial x}$ em $x = 0$ e $x = 1$) que vamos considerar, é possível mostrar que a solução geral é da forma

$$u(t,x) = \sum_{k \geq 0} a_k(t) \cos(\pi k x) + \sum_{k > 0} b_k(t) \sin(\pi k x),$$

onde as funções a_k e b_k podem ser obtidas (com as técnicas dos episódios anteriores) a partir da *condição inicial* $u(0,x)$. No episódio 6, vamos falar das *séries de Fourier* (isto é, séries semelhantes à de $u(t,x)$) e algumas variantes. No episódio 7, discutimos vários exemplos de EDPs, resolvidas aplicando técnicas de todos os episódios anteriores.

João Pedro Boavida <joao.boavida@tecnico.ulisboa.pt>,
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico,
Universidade de Lisboa,
Outubro de 2015

CONTEÚDO

EPISÓDIO 1

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Neste episódio, vamos discutir as estratégias mais importantes para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem. Aqui, mencionamos só algumas ideias.

Considerem a equação

$$xy' - 2yy' + y = 0, \qquad y(0) = 3.$$

À primeira vista, não é óbvio como resolvê-la. Por outro lado, quem é $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy - y^2)$? (Notem que x é a variável independente, por isso $(y^2)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2)$ *não* é só $2y$!) Qual é então a solução da equação?

Uma equação diferencial diz-se *exata* se existe uma função $\Phi(x, y)$ que permite escrever a equação na forma $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\Phi(x, y)\big) = 0$. Usando a regra da função composta, isso fica $\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$. Assim, se $y(x)$ é uma solução da equação, $\Phi(x, y(x))$ é constante.

Pode acontecer que uma equação não seja exata, mas que seja *redutível a exata*. Por exemplo, a equação

$$x\,e^x\,y' + e^x\,y - 1 = 0$$

não é exata (como é que podemos ter a certeza?). Mas se multiplicarmos tudo por e^{-x} (porque é que podemos?), obtemos

$$xy' + y - e^{-x} = 0,$$

que *é* exata. Conseguem resolvê-la?

(1.1) ALGUNS EXEMPLOS para ilustrar como é possível resolver certas equações, mesmo sem grande estratégia. Na equação

$$x + xy' = 2y,$$

podemos tentar que xy' e $2y$ sejam parcelas de uma derivada do quociente (porquê?). Para tal, precisaríamos que fossem x^2y' e $2xy$, algo que podemos conseguir multiplicando tudo por x e fazendo algumas manipulações simples:

$$x^2\,y' - (x^2)'\,y = -x^2.$$

Daqui, basta-nos dividir tudo por $(x^2)^2$, que nos leva a

$$\frac{(x^2)\,y' - (x^2)'\,y}{(x^2)^2} = -\frac{1}{x^2}$$

e a

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)', \qquad \text{ou} \qquad \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x} + C,$$

para alguma constante C. Assim, desde que o intervalo de definição que queremos exclua $x = 0$ (porquê?), concluímos que $y = x + Cx^2$.

(1.2) Vejamos um exemplo com uma equação de *segunda ordem* (i.e., envolvendo a segunda derivada). Se

$$(2x+1)f'' - 2f' = (1-4x^2)(2x+1),$$

é tentador ver o lado esquerdo como numerador de uma regra do quociente. Se dividirmos tudo por $(2x+1)^2$, ficamos com

$$\frac{(2x+1)f'' - (2x+1)'f'}{(2x+1)^2} = \frac{1-4x^2}{2x+1}.$$

Como $1-4x^2 = (1-2x)(1+2x)$, podemos simplificar um pouco mais e chegar a

$$\left(\frac{f'}{2x+1}\right)' = 1-2x.$$

Assim, para intervalos de definição excluindo $2x+1 \neq 0$ (porquê?), vemos que

$$\frac{f'}{2x+1} = x - x^2 + A,$$

para alguma constante A. Escrevendo em ordem a f' e primitivando uma segunda vez, concluímos que

$$f = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + A(x^2+x) + B,$$

para uma segunda constante B.

(1.3) *Exercício.* Considerem uma solução definida em todo o $\mathbb{R}$. Acabámos de ver que para $x < -\frac{1}{2}$ (porquê $-\frac{1}{2}$?) a solução é da forma

$$f = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + A_1(x^2+x) + B_1$$

para constantes A_1 e B_1, e que para $x > -\frac{1}{2}$ é da forma

$$f = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + A_2(x^2+x) + B_2$$

para constantes A_2 e B_2. Quais as relações entre as várias constantes? Conseguem determinar *todas* as soluções da equação? Pode ser útil voltar à equação original e tentar determinar $f'(-\frac{1}{2})$.

(1.4) *Exercício.* Resolvam estas equações diferenciais tentando reconhecer regras de derivação. Determinem também os intervalos em que as soluções são válidas. (Pode ser útil começarem por identificar a variável dependente e a independente, já que variam de equação para equação.) Se tiverem informação suficiente, determinem as constantes.

(a) $y' = t^2, \quad y(0) = 2;$
(b) $2yy' = x^2, \quad y(1) = 1;$
(c) $2yy' = x^2, \quad y(1) = -1;$
(d) $f + tf' = t, \quad f(-2) = -1;$
(e) $f + tf' = t, \quad f(-2) = -2;$
(f) $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{1}{x^2}, \quad u(1) = -1.$

(1.5) As equações separáveis são aquelas em que, através de multiplicações ou divisões (de ambos os membros pela mesma função), conseguimos separar as variáveis em lados opostos da equação. Por exemplo,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot x = y^2 \cdot \log x, \qquad y(1) = -2,$$

pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\log x}{x}, \qquad y(1) = -2,$$

desde que não haja divisões por zero. (Já agora, log é o logaritmo natural, já que não há qualquer outro logaritmo relevante daqui em diante.) Ou, escrito de forma mais sugestiva,

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{1}{x} \cdot \log x \, \mathrm{d}x \, .$$

Integrando de ambos os lados, obtemos (é preciso fazer mudanças de variável—quais?)

$$-\frac{1}{y} = \frac{(\log x)^2}{2} + C$$

(não se esqueçam da constante!). Substituindo a *condição inicial* $y(1) = -2$, descobrimos que $C = 1/2$. Portanto,

$$y = -\frac{2}{(\log x)^2 + 1}.$$

(1.6) *Exercício.* Aqui está uma equação mais simples: usando a mesma estratégia, procurem soluções de

$$y' - xy + y = 0, \qquad y(0) = 2.$$

Notem que é preciso algum cuidado a lidar com os casos $y = 0$ ou $y < 0$.

(1.7) *Exercício.* Resolvam a equação

$$y' e^x = 1 + y, \qquad y(0) = e - 1.$$

(1.8) *Exercício.* Resolvam a equação

$$ty' + y^2 + 1 = y' + t^2 y^2 + t^2, \qquad y(0) = 0.$$

(1.9) *Exercício.* Considerem agora a equação

$$y' = (3 + t)\, y^2.$$

(a) Assumindo que $y(t) \neq 0$, qual a solução desta equação? Notem que não estamos a especificar a sua condição inicial. Isso significa que, depois de fazer as primitivas, não temos como determinar o valor da constante, e por isso deixamo-la ficar, sem tentarmos especificar o seu valor.

(b) Qual o intervalo de definição da solução da alínea anterior?

(c) Encontrem uma solução com $y(0) = 0$.

(d) Imaginem que $y(t)$ é uma solução com $y(t_0) > 0$. Mostrem que, no seu intervalo de definição, temos sempre $y(t) > 0$.

(e) Façam o mesmo para uma solução com $y(t_0) < 0$.

(f) Concluam que só existe uma solução com $y(t_0) = 0$. Qual é?

(1.10) *Exercício.* Façam um estudo (como o do exercício anterior) das soluções de cada uma destas equações:

(a) $(3+t)\,y' = y$; (b) $(3+t)\,y' = y^2$; (c) $y' - yt = y'\,t^2$.

(1.11) Equações exatas. Há pouco, considerámos a equação

$$xy' - 2yy' + y = 0$$

(a variável independente é x) com condição inicial $y(0) = 3$. Observámos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(xy - y^2\big) = xy' - 2yy' + y,$$

o que nos leva a concluir (porquê?) que $xy - y^2$ é constante. Substituindo a condição inicial, vemos que a constante é -9 e obtemos a fórmula $xy - y^2 = -9$, que pode ser resolvida para obter y.

Dissemos que a equação (com variável independente x)

$$P + Q \cdot y' = 0$$

é *exata* se existir uma função $\Phi(x, y)$ cujo gradiente seja (P, Q), ou seja, cujas derivadas parciais sejam $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q$. Nesse caso, $\Phi(x, y)$ é constante ao longo das soluções $y(x)$ da equação (notem que x é a variável independente), pois a regra da função composta diz-nos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\Phi(x, y(x))\big) = \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}_{P} + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}_{Q} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{y'} = P + Q \cdot y' = 0.$$

Se um tal Φ existir, então teremos

$$\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}_{Q} = \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}_{P} \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

(Se isto vos lembra alguma coisa, não é coincidência.) Ou seja, a equação é exata apenas se $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

(1.12) Por exemplo, considerem a equação diferencial

$$\underbrace{-2x^2\,y}_{Q}\,y'\underbrace{-2xy^2+e^x}_{P}=0$$

com condição inicial $y(1)=2$. Queremos encontrar uma função Φ cujo gradiente $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$ seja (P,Q). Para isso consideramos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x}&=-2xy^2+e^x &&\Rightarrow\quad \Phi=-x^2\,y^2+e^x+(\text{função de }y),\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}&=-2x^2\,y &&\Rightarrow\quad \Phi=-x^2\,y^2+(\text{função de }x).\end{aligned}$$

A escolha $\Phi(x,y)=-x^2\,y^2+e^x$ é compatível com ambas as condições. Como $\Phi(1,2)=e-4$ (de onde vêm o 1 e o 2?), concluímos que a solução satisfaz a equação

$$-x^2\,y^2+e^x=e-4.$$

Resolvendo em ordem a y, obtemos

$$y=\pm\sqrt{\frac{e^x-e+4}{x^2}}.$$

Só o sinal positivo é compatível com a condição inicial; essa é a fórmula para a solução.

(1.13) *Exercício.* Experimentem resolver estas equações exatas (nalguns casos pode não ser prático resolver em ordem a y; vão tão longe quanto conseguirem):

(a) $2x+2yy'=1,\quad y(0)=1;$
(b) $2yy'+y\sin x=y'\cos x,\quad y(0)=-2;$
(c) $y^2+2xyy'+y\sin x=y'\cos x-2x,\quad y(\pi)=0;$
(d) $2xyy'+y^2=4x^3,\quad y(1)=1;$
(e) $x^4\,y'+4x^3\,y+1=2xyy'+y^2+y',\quad y(1)=2;$
(f) $\pi y\sin(\pi x)+y'=x^2\,y'+2xy+y'\cos(\pi x),\quad y(2)=1;$
(g) $4x^3+xy'+2yy'+y+9=2x^2\,y'+3x^2+4xy+4x,\quad y(0)=3.$

(1.14) Equações redutíveis a exatas. Também vimos que a equação

$$x\,e^x\,y'+e^x\,y-1=0$$

não é exata e observámos que, se a multiplicarmos por e^{-x}, obtemos

$$xy'+y-e^{-x}=0,$$

que é uma equação exata com as mesmas soluções que a primeira. (Conseguiram resolvê-la?) Por isso, dizemos que a equação original é *redutível a exata*. A função e^{-x} usada para fazer a redução é chamada *fator integrante* ou *fator de integração*. (Como usamos integração

para resolver uma equação exata, também há quem fale em "integrar a equação" em vez de "resolver a equação"—e por isso o fator ajuda a integrar a equação. Daí o nome.)

E como é que encontramos fatores integrantes? Boa pergunta. Se tivermos uma equação

$$P + Q \cdot y' = 0$$

e $\mu(x, y)$ for um fator integrante (é tradicional chamar μ ao fator), então a equação

$$\mu \cdot P + \mu \cdot Q \cdot y' = 0$$

é exata. Isso significa que as derivadas cruzadas são iguais, ou seja,

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}.$$

Simplificando estas derivadas (com a regra do produto), obtemos

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q + \mu \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P + \mu \cdot \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Notem que tanto P e Q (conhecidas) como μ (desconhecido) são funções de x e de y. Se calhar isto não é lá muito prático…

(1.15) De acordo: se não soubermos nada sobre μ, não vamos longe. Mas podemos tentar casos especiais. Por exemplo, se μ só depender de x, então a equação anterior fica apenas

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} \cdot Q + \mu \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Se, após simplificação, for possível eliminar y, então esta equação é separável (!) para μ (se tal não for possível, então não existe μ dependente só de x). Voltemos ao exemplo de há pouco:

$$\underbrace{x\,e^x}_{Q} y' + \underbrace{e^x\,y - 1}_{P} = 0$$

A equação para μ fica

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} \cdot \underbrace{x\,e^x}_{Q} + \mu \cdot \underbrace{(e^x + x\,e^x)}_{\frac{\partial Q}{\partial x}} = \mu \cdot \underbrace{e^x}_{\frac{\partial P}{\partial y}}.$$

Concordo que isto parece cada vez pior. Mas podemos fazer alguns cancelamentos e simplificar um pouco a equação:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = -\mu.$$

Resolvam em ordem a μ (há mais que uma solução, escolham uma qualquer que não seja nula, por exemplo, a que tem $\mu(0) = 1$). Que função encontram? (A sério; parem aqui para calcular.) E qual é o fator integrante que tínhamos usado antes? Coincidência?

(1.16) Se quisermos um fator integrante μ dependente apenas de y, a equação no final de (1.14) reduz-se (porquê?) a

$$\mu \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{d\mu}{dy} \cdot P + \mu \cdot \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Por exemplo, a equação

$$x^4 y^2 y' + 4x^3 y^3 = 2y^3 y', \qquad y(0) = -4$$

tem um fator integrante que só depende de y. Se escreverem a equação diferencial para μ (experimentem!) e simplificarem, chegam a algo como

$$\frac{d\mu}{dy} = -\frac{2\mu}{y}.$$

(Já agora, reparem que depois de simplificada a equação envolve apenas μ e y. Se ainda restasse algum x, era impossível resolvê-la com um μ dependente apenas de y. Percebem porquê?) Esta equação é separável; qual é a sua solução?

Podemos ver que $\mu(y) = y^{-2}$ é um fator integrante. (Conseguem, sem quaisquer contas, indicar outros fatores integrantes?) Multiplicando-o na equação original, obtemos

$$x^4 y' + 4x^3 y - 2yy' = 0, \qquad y(0) = -4,$$

cuja integração leva a $x^4 y - y^2 = -16$. Resolvendo em ordem a y, obtemos

$$y = \frac{x^4 - \sqrt{x^8 + 64}}{2}$$

(reparem que escolhemos o sinal negativo, pois só esse é compatível com $y(0) = -4$).

(1.17) *Exercício.* Encontrem fatores integrantes para as seguintes equações, e resolvam-nas.

(a) $x^2 y e^x + x^2 e^x y' + xy' = y, \quad y(1) = e + 1$;

(b) $y^2 \cos x + yy' \sin x = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 2$;

(c) $2x^2 y^2 y' + xy^3 + y' = 3xyy' + y^2, \quad y(1) = 1$;

(d) $yy' + ye^x + 1 = \dfrac{xy'}{y}, \quad y(0) = 2$.

As equações podem ser resolvidas com fatores da forma $\mu(x)$ ou $\mu(y)$. Se houver fatores de ambos os tipos, determinem-nos, e resolvam a equação original usando ambos os fatores.

(1.18) Mas sejamos um pouco mais ambiciosos: haverá alguma forma sistemática de verificar se existe um fator integrante da forma $\mu(x + y)$ ou $\mu(xy)$ ou $\mu(x - y)$? (Aqui estamos a cometer um pequeno abuso de linguagem: em vez de falar em $\mu(x+y)$, deveríamos falar em $\mu(x, y) = \nu(x+y)$, onde ν é uma nova função. Mas tal não seria necessariamente mais claro.)

Há. Se o fator integrante for da forma $\mu(s)$ (onde $s = x + y$, ou $s = xy$, ou $s = x - y$, ou outra expressão que queiramos experimentar), então a equação no final de (1.14) pode escrever-se

$$\frac{d\mu}{ds} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \cdot Q + \mu \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{d\mu}{ds} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} \cdot P + \mu \cdot \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Separando o μ à esquerda e abreviando $\mu' = \frac{d\mu}{ds}$, podemos ainda obter (verifiquem)

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{\frac{\partial s}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial s}{\partial y} \cdot P}.$$

Se for possível simplificar o lado direito de forma a envolver apenas s, então a solução desta equação é um fator integrante. De contrário, a equação é impossível (pois o lado esquerdo poderia ser escrito apenas em termos de s e o lado direito não, o que seria uma contradição).

(1.19) Por exemplo, considerem a equação

$$x^5 y' + x^4 yy' + 4x^4 y + 4x^3 y^2 = 2x^2 yy' + 2xy^2 y' + xy^2 + y^3, \qquad y(1) = 2,$$

que tem um fator integrante da forma $\mu(x + y)$ (portanto, $s = x + y$, $\frac{\partial s}{\partial x} = 1$ e $\frac{\partial s}{\partial y} = 1$).

Como $P = 4x^4 y + 4x^3 y^2 - xy^2 - y^3$ e $Q = x^5 + x^4 y - 2x^2 y - 2xy^2$, a fórmula para $\frac{\mu'}{\mu}$ fica

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{x^4 - 4x^3 y - 2xy + y^2}{\frac{\partial s}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial s}{\partial y} \cdot P} = -\frac{x^4 - 4x^3 y - 2xy + y^2}{x^5 - 3x^4 y - 2x^2 y - xy^2 - 4x^3 y^2 + y^3}.$$

Se existir um fator integrante que dependa apenas de $s = x + y$, devíamos ser capazes de simplificar esta expressão de forma a depender apenas de s. A tarefa não parece prometedora, mas se for possível, o x^4 de cima deve (junto com o resto do numerador) conseguir cancelar parte do denominador, de forma a obter uma expressão com $x + y$. Assim, um palpite razoável neste caso é: será que o denominador é apenas $x + y$ multiplicado pelo numerador? Experimentemos:

$$(x + y)(x^4 - 4x^3 y - 2xy + y^2) = x^5 - 4x^4 y - 2x^2 y + xy^2 + x^4 y - 4x^3 y^2 - 2xy^2 + y^3.$$

É realmente o denominador. Assim, concluímos que

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{x + y} = -\frac{1}{s}.$$

Uma solução desta equação é $\mu(s) = s^{-1}$, mostrando que $1/(x + y)$ é um fator integrante. Dito de outra forma, devemos conseguir pôr $(x + y)$ em evidência na equação original

$$x^5 y' + x^4 yy' + 4x^4 y + 4x^3 y^2 = 2x^2 yy' + 2xy^2 y' + xy^2 + y^3, \qquad y(1) = 2.$$

Tentemos:

$$(x + y)x^4 y' + 4(x + y)x^3 y = 2(x + y)xyy' + (x + y)y^2.$$

Realmente é verdade. Dividindo tudo por $x + y$ obtemos então a equação exata

$$x^4 y' + 4x^3 y - 2xyy' - y^2 = 0, \qquad y(1) = 2,$$

que, por integração, nos leva a $x^4 y - xy^2 = -2$. Resolvendo em ordem a y e usando a condição inicial para decidir o sinal, chegamos a

$$y = \frac{x^4 + \sqrt{x^8 + 8x}}{2x}.$$

(1.20) Mais um exemplo. A fórmula (1.18) para a equação

$$2xy^2\,y' + 2y^3 = 4x^2\,y, \qquad y(1) = 1,$$

fica (depois de simplificada)

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{-4y^2 + 4x^2}{\frac{\partial s}{\partial x}\cdot 2xy^2 - \frac{\partial s}{\partial y}\cdot (2y^3 - 4x^2\,y)}.$$

Se $s = x$, obteríamos

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{-4y^2 + 4x^2}{2xy^2}.$$

Veem alguma forma de simplificar isto de forma a eliminar o y? Eu também não.

Com $s = y$, teríamos

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{-4y^2 + 4x^2}{-2y^3 + 4x^2\,y}.$$

Infelizmente, por pouco (bastava que fosse um 4 em vez de um 2), também não conseguimos livrar-nos do x.

Consideremos então $s = y/x$, com $\frac{\partial s}{\partial x} = -y/x^2$ e $\frac{\partial s}{\partial y} = 1/x$. (Em geral, está longe de ser evidente qual um s que funcionará. Não se tratando de $s = x$ nem de $s = y$, é mesmo preciso alguma pista adicional.) Nesse caso, a equação para μ fica

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{-4y^2 + 4x^2}{-\frac{y\cdot 2xy^2}{x^2} - \frac{2y^3 - 4x^2\,y}{x}} = \frac{4x^2\,(y^2 - x^2)}{-2xy^3 - x\,(2y^3 - 4x^2\,y)} = \frac{4x^2\,(y^2 - x^2)}{-4xy\,(y^2 - x^2)} = -\frac{x}{y}.$$

Ou seja, $\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{s}$. Assim, $\mu(s) = s^{-1} = x/y$ é um fator integrante (verifiquem, e tenham cuidado com as coincidências). Multiplicando a equação original pelo fator integrante, obtemos

$$2x^2\,yy' + 2xy^2 - 4x^3 = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Integrando, obtemos $x^2\,y^2 - x^4 = 0$, que tem duas soluções diferenciáveis (verifiquem!): $y = x$ e $y = -x$. Destas, só $y = x$ é compatível com a condição inicial.

(1.21) *Exercício.* Resolvam a equação

$$6xy^3\,y' + 3y^4 = 5x^2\,y^2 + 4x^3\,yy', \qquad y(2) = 2,$$

sabendo que tem um fator integrante da forma $\mu(xy)$.

(1.22) Equações lineares de primeira ordem. Uma equação diferencial diz-se *linear* se corresponde a um problema linear (homogéneo ou não homogéneo). Em particular, no caso homogéneo, o espaço das soluções é um espaço vetorial.

Assim, a equação (nesta secção vamos usar t como variável independente)

$$y' + ty = 0$$

é linear, pois a transformação T (do espaço C^1 das funções com derivada contínua para o espaço C^0 das funções contínuas) dada por

$$T(y) = y' + t \cdot y$$

é linear (sim?) e a equação original corresponde ao sistema (homogéneo) $T(y) = 0$.

Mais geralmente, uma equação linear de primeira ordem pode ser escrita na forma

$$y'(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t)$$

e é sempre redutível a exata. Como habitualmente, abreviamo-la assim:

$$\underbrace{-a(t) \cdot y - b(t)}_{P} + \underbrace{1}_{Q} \cdot y' = 0.$$

Usando a equação (1.18) com $s = t$, $\frac{\partial s}{\partial t} = 1$, e $\frac{\partial s}{\partial y} = 0$, obtemos (recordem que estamos a usar t, e não x, como variável independente)

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{\overbrace{0}^{\frac{\partial Q}{\partial t}} - \overbrace{\big(-a(t)\big)}^{\frac{\partial P}{\partial y}}}{1 \cdot Q - 0 \cdot P} = -a(t).$$

Nitidamente, o lado direito depende apenas de t, pelo que existe um fator integrante da forma $\mu(t)$. Resolvendo a equação, obtemos

$$\log|\mu(t)| = -\int a(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Assim, podemos escolher

$$\mu(t) = e^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t}$$

como fator integrante. Se tivermos uma condição inicial em $t = t_0$, será preferível escolher uma primitiva mais específica:

$$\mu(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}$$

(reparem que tivemos que mudar a variável de integração—veem porquê?).

Para simplificar as contas que se seguem, observamos desde já (a partir da equação acima para μ'/μ) que $\mu'(t) = -a(t) \cdot \mu(t)$. Multiplicando $\mu(t)$ na equação original, ficamos com

$$\mu(t) \cdot y' - \mu(t) \cdot a(t) \cdot y = \mu(t) \cdot b(t).$$

Mas isto é equivalente (verifiquem!) a

$$\Big(\mu(t) \cdot y\Big)' = \mu(t) \cdot b(t),$$

cuja solução é

$$\mu(t) \cdot y = \int \mu(t) \cdot b(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Se tivermos uma condição inicial $y(t_0) = y_0$, podemos ser mais específicos e dizer que

$$\mu(t) \cdot y(t) - \mu(t_0) \cdot y_0 = \int_{t_0}^{t} \mu(r) \cdot b(r)\,\mathrm{d}r$$

(de novo, precisámos de mudar a variável de integração). Resolvendo em ordem a $y(t)$, chegamos a (verifiquem!)

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \cdot y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{r}^{t} a(s)\,ds} \cdot b(r)\,dr\,.$$

Esta é a *fórmula de variação das constantes*. Se olharem para uma equação diferencial e reconhecerem que é linear, podem usar esta fórmula diretamente, sem terem de perder tempo à procura de um fator integrante.

(1.23) À primeira vista, a fórmula de variação das constantes parece não ter um padrão simples. Por isso, vale a pena explicar um pouco como traduzi-la em intuições sobre a passagem do tempo. Com efeito, podemos pensar que a função

$$e^{\int_{r}^{t} a(s)\,ds}$$

codifica o efeito da passagem do tempo entre o instante r e o instante t. Chamemos-lhe por isso $\text{passagem}^{t\leftarrow r}$. Recordemos que a equação original era

$$y'(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Intuitivamente, isto indica que a variação de y tem uma componente que depende do próprio y (portanto deveria envolver uma exponencial e a condição inicial—daí $\text{passagem}^{t\leftarrow r}$ envolver a exponencial) bem como uma contribuição adicional em cada instante r anterior a t, controlada por $b(r)$. Isto é, a contribuição de y_0 vê o tempo passar de t_0 a t, enquanto que cada contribuição $b(r)$ vê o tempo passar de r a t. Assim, o resultado deveria ser

$$y(t) = \text{passagem}^{t\leftarrow t_0} \cdot y_0 + \int_{t_0}^{t} \text{passagem}^{t\leftarrow r} \cdot b(r)\,dr\,.$$

Se compararem com a fórmula de variação das constantes, veem que é exatamente isso o que ela diz.

Embora esta mnemónica possa parecer pouco fiável, a verdade é que há um conceito muito geral de exponencial que codifica esta ideia de passagem do tempo. Por exemplo, a exponencial habitual (na reta real ou no plano complexo) corresponde a $\text{passagem}^{t\leftarrow r} = e^{t-r}$. As propriedades da exponencial correspondem a propriedades da passagem do tempo: dizer $e^{t-t} = 1$ é dizer $\text{passagem}^{t\leftarrow t} = 1$, e dizer $e^{t-s} \cdot e^{s-r} = e^{t-r}$ é dizer $\text{passagem}^{t\leftarrow s} \cdot \text{passagem}^{s\leftarrow r} = \text{passagem}^{t\leftarrow r}$ (ou seja, é dizer que fazer o tempo passar de r a s e depois de s a t é equivalente a fazê-lo passar de r a t).

(1.24) *Exercício.* Aqui estão mais algumas equações de primeira ordem para resolverem:

(a) $y' - \sin t \cdot y = \sin t, \quad y(0) = -2;$

(b) $3y^2\,y' + 2xy' + 2x + 2y = 0, \quad y(0) = 2;$

(c) $6tyy' + 4y^2\,y' + 2y^2 = y\,e^t + 2e^t\,y', \quad y(4) = 0;$

(d) $2t^2\,y + tyy' + ty' + 3t\,e^t = t^3 + 2y^2\,y' + 2yy' + 6y\,e^t, \quad y(0) = 2.$

Na última equação, precisam de um fator integrante do tipo $\mu(t - 2y)$.

(1.25) MUDANÇA DE VARIÁVEL. Por vezes, uma mudança de variável bem escolhida pode ajudar a encontrar soluções de uma equação diferencial. Por exemplo, na equação

$$x + xy' = 2y$$

podemos substituir $y(x) = u(x)\,x^2$. (Como esta mudança não é invertível em $x = 0$, sabemos desde logo que podemos não encontrar todas as soluções, ou que as que encontrarmos podem ter problemas, próximo de $x = 0$.) Como $y' = u'\,x^2 + 2ux$, substituindo na equação original obtemos

$$x + x\,(u'\,x^2 + 2ux) = 2ux^2,$$

que depois de simplificada se reduz a

$$x + u'\,x^3 = 0, \qquad \text{ou} \qquad u' = -\frac{1}{x^2}.$$

Somos assim levados a concluir que $u = \frac{1}{x} + C$, e que

$$y = ux^2 = x + Cx^2.$$

(1.26) *Exercício.* Usando a equação original em (1.25), o que podem concluir sobre $y(0)$? Mostrem que é possível escolher a solução em $x < 0$ independentemente da solução em $x > 0$ e determinem todas as soluções da equação diferencial em $\mathbb{R}$.

(1.27) As substituições úteis nem sempre são óbvias, mas por vezes algum padrão na equação pode sugerir opções a tentar. Por exemplo, em

$$y' = 3y + 3y^{2/3}$$

é tentador livrarmo-nos da raiz cúbica usando $y = u^3$ (que, naturalmente, pode esconder problemas quando $y = 0$, pois embora nesse ponto a mudança de variável seja invertível—$u = y^{1/3}$—, a inversa não é diferenciável). Substituindo $y' = 3u^2\,u'$ na equação original, obtemos (é preciso algum cuidado com os sinais na aritmética com expoentes fracionários)

$$3u^2\,u' = 3u^3 + 3u^2, \qquad \text{ou} \qquad u' = u + 1.$$

(1.28) *Exercício.* Encontrem um fator integrante adequado para $u' = u + 1$ e determinem todas as soluções dessa equação. Quais as soluções correspondentes para a equação original $y' = 3y + 3y^{2/3}$? Há mais soluções?

(1.29) *Exercício.* Usem substituições adequadas para resolver as seguintes equações.

(a) $y' = 2y + 4y^{3/4}, \quad y(0) = 1.$

(b) $y' = 4y + 2y^{1/4}, \quad y(1) = 1.$

(c) $\cos y\; y' = e^t + \sin y, \quad y(1) = 0.$

(d) $y' = t\,e^{2t}\,y + 2y\,\log y, \quad y(2) = 1.$

Basta identificarem uma solução, mas tentem perceber se pode haver mais.

(1.30) Respostas de exercícios.

(1.3) basta exigir $-\frac{1}{4}A_1 + B_1 = -\frac{1}{4}A_2 + B_2$.

(1.4) (a) $y(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2$, $t \in \mathbb{R}$.
(b) $y(x) = \sqrt{\frac{x^3+2}{3}}$, $x > -\sqrt[3]{2}$.
(c) $y(x) = -\sqrt{\frac{x^3+2}{3}}$, $x > -\sqrt[3]{2}$.
(d) $f(t) = \frac{t}{2}$, $t \in \mathbb{R}$.
(e) $f(t) = \frac{t}{2} + \frac{2}{t}$, se $t < 0$; $f(t) = \frac{t}{2} + \frac{C}{t}$, se $t > 0$.
(f) $u(x) = C\exp(-\frac{1}{x})$ (com $C \neq 0$), se $x < 0$; $u(x) = -\exp(1 - \frac{1}{x})$, se $x > 0$.

(1.6) $y(x) = 2\exp(\frac{x^2}{2} - x)$.

(1.7) $y(x) = \exp(2 - e^{-x}) - 1$.

(1.8) $y(t) = \tan(\frac{t^2}{2} + t)$, para $-1 - \sqrt{1+\pi} < t < -1 + \sqrt{1+\pi}$.

(1.9) (a) $y(t) = \dfrac{1}{C - 3t - \frac{t^2}{2}}$.
(b) o maior intervalo contendo a condição inicial e excluindo os pontos $-3 \pm \sqrt{9+2C}$.
(c) $y(t) = 0$. (f) $y(t) = 0$.

(1.10) (a) $y(t) = C(t+3)$ (com $C \in \mathbb{R}$).
(b) $y(t) = \dfrac{1}{C - \log|t+3|}$ (com $C \in \mathbb{R}$, e no maior intervalo excluindo zeros do denominador) ou $y(t) = 0$.
(c) $y(t) = \dfrac{C}{\sqrt{|t^2-1|}}$ (com $C \neq 0$, e no maior intervalo excluindo $t = \pm 1$) ou $y(t) = 0$.

(1.13) (a) $y(x) = \sqrt{1 + x - x^2}$.
(b) $y(x) = \dfrac{\cos x - \sqrt{(\cos x)^2 + 24}}{2}$.
(c) $y(x) = \dfrac{\cos x + \sqrt{(\cos x)^2 - 4x^3 + 4x\pi^2}}{2x}$.
(d) $y(x) = x^{3/2}$.
(e) $y(x) = \dfrac{1 - x^4 - \sqrt{(x^4-1)^2 + 4x(x+3)}}{-2x}$.
(f) $y(x) = \dfrac{4}{\cos(\pi x) - 1 + x^2}$.
(g) $y(x) = x^2 - 2x + 3$.

(1.17) (alguns dos fatores integrantes possíveis, seguidos da solução)
(a) x^{-2}; $y(x) = \dfrac{(e+1)^2}{e^x + \frac{1}{x}}$.
(b) $\sin x$ ou y^{-1}; $y(x) = \dfrac{2}{\sin x}$.
(c) y; $y(x) = \dfrac{1}{x}$.
(d) y^{-1}; $y(x) = \dfrac{3 - e^x + \sqrt{(e^x-3)^2 - 4x}}{2}$.

(1.21) um fator possível é x^2y^2; $y(x) = x$.

(1.24) (a) $y(t) = -1 - \exp(1 - \cos t)$.
(b) solução implícita de $y^3 + 2xy + x^2 = 8$.
(c) um fator possível é y; $y(x) = 0$.
(d) um fator possível é $(t - 2y)^{-1}$; $y(t) = -1 + \sqrt{15 - 6e^t + \frac{2}{3}t^3}$.

(1.26) $y(0) = 0$. $y(x) = x + C_1 x^2$ se $x < 0$; $y(x) = x + C_2 x^2$ se $x > 0$.

(1.28) $u(t) = Ce^t - 1$ (com $C \in \mathbb{R}$). $y(t) = (Ce^t - 1)^3$. $y(t) = 0$ e ainda colagens de soluções dos dois tipos (vejam o exercício (2.26) para mais pistas).

(1.29) (a) $y(t) = (3e^{t/2} - 2)^4$.
(b) $y(t) = \big(\frac{3}{2}e^{3t-3} - \frac{1}{2}\big)^{4/3}$.
(c) $y(t) = \arcsin(te^t - e^t)$.
(d) $y(t) = \exp\big(\frac{t^2}{2}e^{2t} - 2e^{2t}\big)$.
O exercício (2.27) dá algumas pistas sobre as outras soluções.

EPISÓDIO 2

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES DE EDOs

Nada do que vimos até aqui nos dá indicações sobre a existência ou unicidade das soluções de uma equação diferencial. Como discutimos na introdução, em geral esperamos que, se dois carros começam a viagem lado a lado e as suas velocidades variam da mesma forma ao longo do tempo, então deveriam continuar lado a lado ao longo de toda a viagem.

Começamos por falar um pouco dos *retratos de fase*. Depois vemos que as equações diferenciais podem ser convertidas em equações integrais, para as quais uma discussão algo técnica nos dá um critério simples com que assegurar existência e unicidade das soluções. À primeira vista, o critério parece restringir-nos a intervalos mais limitados do que queremos, mas vamos ver que por vezes é possível prolongar as soluções (sempre de forma única) a intervalos maiores.

(2.1) Retratos de fase. Para percebermos melhor o que acontece, vamos recorrer aos *retratos de fase*. A ideia fica mais clara se começarmos com duas variáveis dependentes. Imaginem que queremos perceber as soluções de

$$x_1'(t) = -x_2(t), \qquad x_2'(t) = x_1(t).$$

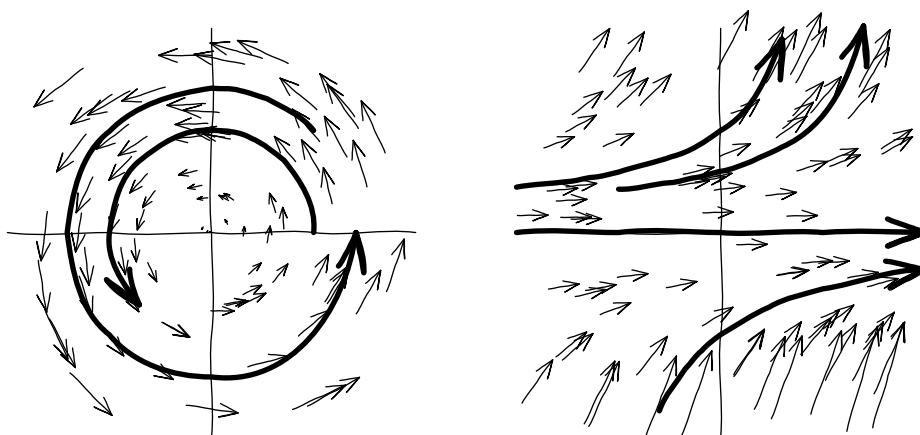
Podemos escrever isto de forma mais compacta pondo $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ e dizendo que a equação é

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)),$$

onde $\mathbf{F}$ é um campo vetorial dependente de $\mathbf{x}(t)$ ($\mathbf{F}$ poderia depender também de t, mas neste exemplo isso não se passa). Nestes termos, o que queremos é encontrar um caminho $\mathbf{x}$ parametrizado por t, cujo vetor velocidade seja $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$. Equações com a mesma $\mathbf{F}$ mas condições iniciais diferentes, corresponderão a caminhos diferentes no retrato de fase (que é essencialmente uma representação do campo vetorial $\mathbf{F}$). Em geral, não convém representar as velocidades na mesma escala que as posições (de outra forma, a figura tende a ficar confusa).

(2.2) Quando temos só uma variável dependente, faz sentido incluir também a variável independente no retrato de fase. Não só é mais fácil percebermos o gráfico das soluções dessa forma (por exemplo, se t for a variável independente e y a variável dependente, podemos ler diretamente os gráficos das soluções $y(t)$), mas também porque F pode perfeitamente depender da variável independente.

Por exemplo, voltemos à equação do exercício (1.9):

$$y' = (3 + t)\, y^2.$$

Se pusermos $\mathbf{v}(t) = (t, y(t)) \in \mathbb{R}^2$, temos $\mathbf{v}'(t) = (t', y') = (1, y')$. Assim, a equação pode ser reescrita como

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{v}(t)), \quad \text{onde} \quad \mathbf{F}(t, y) = (1, (3+t)\,y^2).$$

Isto dá-nos um novo retrato de fase, que revela as soluções correspondentes.

(2.3) O teorema de Picard–Lindelöf dá-nos condições concretas sob as quais uma equação diferencial (com condição inicial) tem solução única. Para fixar ideias, vamos trabalhar com vetores em $\mathbb{R}^n$. (Nas figuras vamos usar $n = 1$, apenas por uma questão de clareza.) Supondo que $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ está definida nos pontos que usarmos, o nosso objetivo é decidir se a equação

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

tem solução e essa solução é única.

Se a equação tiver uma solução $\mathbf{x}(t)$, então

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{x}'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(s, \mathbf{x}(s))\,\mathrm{d}s\,.$$

Ou seja, a solução, a existir, satisfaz a igualdade

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(s, \mathbf{x}(s))\,\mathrm{d}s\,.$$

Isto sugere que, dada uma função $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t)$, usemos

$$\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(s, \mathbf{x}(s))\,\mathrm{d}s\,.$$

como *definição* de uma nova função, à qual chamaremos (à falta de melhor nome) $\Phi(\mathbf{x})$. Nessa linguagem, $\mathbf{x}$ é uma solução da equação original precisamente quando $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ for satisfeita.

Ora, isto sugere a seguinte estratégia: começamos com uma função $\mathbf{x}_{(0)}$ qualquer (por exemplo, $\mathbf{x}_{(0)}(t) = \mathbf{0}$), e definimos recursivamente $\mathbf{x}_{(n+1)} = \Phi(\mathbf{x}_{(n)})$. Se tudo correr bem, o limite destas *iteradas de Picard* é uma solução da equação original.

(2.4) Como isto é algo confuso, é melhor vermos um exemplo. Considerem a equação (não vamos usar notação vetorial, porque estamos em $\mathbb{R}^1$)

$$x'(t) = x(t), \qquad x(0) = 1.$$

A função F correspondente é dada por $F(t, x) = x$, enquanto que Φ é definida por (notem que, conforme o contexto, usamos x para denotar um real, ou para denotar uma função de valores reais)

$$\Phi(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

(Verifiquem que tudo isso faz sentido, e que nesta fórmula x é sempre uma função.)

Assim, se começarmos com $x_{(0)}(t) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
x_{(1)}(t) &= 1 + \int_0^t x_{(0)}(s)\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t 0\,\mathrm{d}s = 1;\\
x_{(2)}(t) &= 1 + \int_0^t x_{(1)}(s)\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t 1\,\mathrm{d}s = 1 + t;\\
x_{(3)}(t) &= 1 + \int_0^t x_{(2)}(s)\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t (1+s)\,\mathrm{d}s = 1 + t + \tfrac{t^2}{2}.
\end{aligned}$$

(2.5) *Exercício.* Determinem ainda $x_{(4)}$ e $x_{(5)}$. Qual acham que é a fórmula para $x_{(n)}(t)$? Conseguem prová-la? Qual a função limite?

(2.6) *Exercício.* Suponham que tínhamos começado com $x_{(0)}(t) = 1$. Quais seriam as funções $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, $x_{(3)}$ correspondentes? E se começássemos com $x_{(0)}(t) = t$?

(2.7) *Exercício.* E se a condição inicial fosse $x(2) = -3$, quem seria $\Phi(x)(t)$? Começando com $x_{(0)}(t) = 0$, quem seriam as iteradas $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, $x_{(3)}$ correspondentes?

(2.8) *Exercício.* Considerem a equação

$$x'(t) = 4 - x(t), \qquad x(1) = 3.$$

Quem são $F(t, x)$ e $\Phi(x)(t)$? Partindo de $x_{(0)}(t) = 1$, determinem $x_{(3)}$.

(2.9) *Exercício.* Considerem a equação

$$y'\,e^x = 1 + y, \qquad y(0) = e - 1.$$

do exercício (1.7). Quem são $F(x, y)$ e $\Phi(y)(x)$? Partindo de $y_{(0)}(x) = 1$, determinem $y_{(2)}$.

(2.10) *Exercício.* Qual a equação diferencial e respetiva condição inicial associadas a

$$\Phi(u)(t) = -2 + \int_2^t s + u(s)\,\mathrm{d}s?$$

Se $u_{(0)}(t) = 1$ e $u_{(n+1)} = \Phi(u_{(n)})$, qual o valor de $\lim_{n\to\infty} u_{(n)}(t)$?

(2.11) CONSTANTES DE LIPSCHITZ E OPERADORES CONTRATIVOS. É claro que nada garante que as coisas corram bem. Para isso, precisamos de uma discussão algo técnica. Se a quiserem saltar, continuem no (2.21).

Vamos então assumir que $\mathbf{F}(t,\mathbf{x})$ está definida num aberto contendo $(t_0,\mathbf{x}_0)$. Além disso, vamos assumir que $\mathbf{F}$ é contínua, e *localmente Lipschitz* em relação a $\mathbf{x}$. Recordem que a última condição significa que, para cada ponto no domínio de $\mathbf{F}$, existe uma constante C e uma vizinhança do ponto tais que

$$\|\mathbf{F}(t,\mathbf{y}_1)-\mathbf{F}(t,\mathbf{y}_2)\| \le C\left\|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2\right\|$$

para quaisquer dois vetores $(t,\mathbf{y}_1)$ e $(t,\mathbf{y}_2)$ na vizinhança. (Uma tal constante é chamada uma *constante de Lipschitz*.) Notem que esta condição é satisfeita se $\mathbf{F}$ for C^1 (e este é o caso mais frequente).

(2.12) *Exercício**. Mostrem que se $\mathbf{F}$ é diferenciável, então é localmente Lipschitz se e só se as suas derivadas são localmente limitadas (isto é, se existe uma vizinhança de cada $t,\mathbf{x}$ onde as derivadas são limitadas).

(2.13) Assumindo por um momento que não há problemas com os domínios das funções, dadas duas funções $\mathbf{y}_1(t)$ e $\mathbf{y}_2(t)$, temos então

$$\Phi(\mathbf{y}_1)(t)=\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{F}(s,\mathbf{y}_1(s))\,\mathrm{d}s,$$

$$\Phi(\mathbf{y}_2)(t)=\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{F}(s,\mathbf{y}_2(s))\,\mathrm{d}s,$$

$$\Phi(\mathbf{y}_1)(t)-\Phi(\mathbf{y}_2)(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{F}(s,\mathbf{y}_1(s))-\mathbf{F}(s,\mathbf{y}_2(s))\,\mathrm{d}s,$$

donde se segue que

$$\begin{aligned}\|\Phi(\mathbf{y}_1)(t)-\Phi(\mathbf{y}_2)(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t}\mathbf{F}(s,\mathbf{y}_1(s))-\mathbf{F}(s,\mathbf{y}_2(s))\,\mathrm{d}s\right\| \le \int_{t_0}^{t}\|\mathbf{F}(s,\mathbf{y}_1(s))-\mathbf{F}(s,\mathbf{y}_2(s))\|\,\mathrm{d}s\\ &\le C\int_{t_0}^{t}\|(s,\mathbf{y}_1(s))-(s,\mathbf{y}_2(s))\|\,\mathrm{d}s \le CD\,|t-t_0|,\end{aligned}$$

se chamarmos D à distância máxima entre $\mathbf{y}_1(s)$ e $\mathbf{y}_2(s)$ (para os valores de s usados). Além disso,

$$\|\Phi(\mathbf{y}_1)(t)-\mathbf{x}_0\| = \left\|\int_{t_0}^{t}\mathbf{F}(s,\mathbf{y}_1(s))\,\mathrm{d}s\right\| = \int_{t_0}^{t}\|\mathbf{F}(s,\mathbf{y}_1(s))\|\,\mathrm{d}s \le M\,|t-t_0|,$$

se chamarmos M ao máximo de $\|\mathbf{F}(s,\mathbf{y}_1(s))\|$ (para os valores de s usados).

Voltemos então ao t_0 e ao $\mathbf{x}_0$ que definem a condição inicial. Como $\mathbf{F}$ está definida e é Lipschitz numa vizinhança de $(t_0,\mathbf{x}_0)$, podemos escolher $D>0$ e $\varepsilon>0$ tais que

$$|t-t_0|<\varepsilon \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\le D \qquad\Rightarrow\qquad (t,\mathbf{x})\in \text{domínio de } \mathbf{F}.$$

Sendo M o supremo de $\|\mathbf{F}(t,\mathbf{x})\|$ (para $|t-t_0|<\varepsilon$ e $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\le D$) e C a constante de Lipschitz de $\mathbf{F}$ nessa vizinhança, encolhemos ε (se necessário) até que $C\varepsilon<1$ e $M\varepsilon<D$ (veem como?).

(2.14) Consideramos então o espaço vetorial V das funções $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\to\mathbb{R}^n$ contínuas e limitadas, e nele definimos a seguinte norma:

$$\|\mathbf{y}\|_V = \sup_{t:|t-t_0|<\varepsilon} \|\mathbf{y}(t)\|.$$

Podemos assim falar em convergência de sucessões ($\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$ significa $\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}\|_V \to 0$) e de sucessões de Cauchy ($\mathbf{y}_n$ é uma sucessão de Cauchy se $\|\mathbf{y}_m - \mathbf{y}_n\|_V \to 0$ quando $m,n\to\infty$).

(2.15) *Exercício.* Mostrem que V é realmente um espaço vetorial.

(2.16) *Exercício.* Mostrem ainda as três propriedades relevantes da norma:
(a) se $\|\mathbf{y}\|_V = 0$, então $\mathbf{y}(t)=\mathbf{0}$;
(b) $\|\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2\|_V \le \|\mathbf{y}_1\|_V + \|\mathbf{y}_2\|_V$;
(c) se $\lambda\in\mathbb{R}$, então $\|\lambda\mathbf{y}\|_V = |\lambda|\,\|\mathbf{y}\|_V$.

(2.17) *Exercício**. Mostrem que $\|\mathbf{y}_n-\mathbf{y}\|_V\to 0$ (aquilo que acima escrevemos como $\mathbf{y}_n\to\mathbf{y}$) significa que $\mathbf{y}_n$ converge uniformemente para $\mathbf{y}$.

(2.18) *Exercício**. Mostrem que as sucessões de Cauchy em V convergem. Para isso, consideramos uma sucessão de Cauchy $\mathbf{y}_n$. Isto significa que

$$\|\mathbf{y}_m-\mathbf{y}_n\|_V \to 0 \quad \text{quando } m,n\to\infty.$$

Queremos construir uma função $\mathbf{y}\in V$ e mostrar que $\mathbf{y}_n$ converge uniformemente para $\mathbf{y}$.
(a) Para cada $t\in\,]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[$, mostrem que $\mathbf{y}_n(t)$ é uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$.
(b) Construam uma função $\mathbf{y}:\,]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\,\to\mathbb{R}$ que seja limite *pontual* de $\mathbf{y}_n$.
(c) Mostrem que $\mathbf{y}_n\to\mathbf{y}$ uniformemente.
(d) Mostrem que $\mathbf{y}\in V$.

(2.19) Consideramos então o subconjunto $Y\subseteq V$ das funções $\mathbf{y}$ cujos valores satisfazem $\|\mathbf{y}(t)-\mathbf{x}_0\|\le D$. Tudo o que fizemos acima assegura-nos que se $\mathbf{y}$ está em Y então também $\Phi(\mathbf{y})$ está em Y. (Verifiquem!!)

Dadas duas funções $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\in Y$, vimos há pouco que

$$\|\Phi(\mathbf{y}_1)(t)-\Phi(\mathbf{y}_2)(t)\| \le C\int_{t_0}^{t} \left\|\mathbf{y}_1(s)-\mathbf{y}_2(s)\right\| \mathrm{d}s,$$

ou seja (verifiquem!),

$$\|\Phi(\mathbf{y}_1)-\Phi(\mathbf{y}_2)\|_V \le C\varepsilon\,\|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2\|_V,$$

onde $C\varepsilon<1$. (Quando esta desigualdade é válida com uma constante menor que 1, dizemos que Φ é um operador *contrativo*.)

Mas nós tínhamos dito que $\mathbf{x}$ era uma solução da equação diferencial precisamente se $\Phi(\mathbf{x})=\mathbf{x}$. Suponham então que $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$ são duas soluções. Nesse caso, temos

$$\|\underbrace{\Phi(\mathbf{y}_1)}_{\mathbf{y}_1}-\underbrace{\Phi(\mathbf{y}_2)}_{\mathbf{y}_2}\|_V = \|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2\|_V \le C\varepsilon\,\|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2\|_V.$$

Mas como $C\varepsilon < 1$, isto só é possível se $\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_V = 0$, ou seja, se $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$. Isto mostra que, a existir solução da equação diferencial, essa solução está unicamente definida (pelo menos no intervalo $|t - t_0| < \varepsilon$).

Mas será que existe alguma solução? Fazemos o seguinte: escolhemos um qualquer ponto de partida $\mathbf{x}_{(0)}$ e construímos a sucessão definida por $\mathbf{x}_{(n+1)} = \Phi(\mathbf{x}_{(n)})$. Vamos verificar que $\mathbf{x}_{(n)}$ é uma sucessão de Cauchy.

(2.20) *Exercício.* Para abreviar um pouco, pomos $R = C\varepsilon$.

(a) Mostrem que $\|\mathbf{x}_{(n+1)} - \mathbf{x}_{(n+2)}\|_V \le R\|\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x}_{(n+1)}\|_V$.

(b) Usem a desigualdade triangular para mostrar que, para k inteiro positivo,

$$\|\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x}_{(n+k)}\|_V \le \|\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x}_{(n+1)}\|_V + \|\mathbf{x}_{(n+1)} - \mathbf{x}_{(n+2)}\|_V + \cdots + \|\mathbf{x}_{(n+k-1)} - \mathbf{x}_{(n+k)}\|_V.$$

(c) Mostrem que, para k inteiro positivo,

$$\|\mathbf{x}_{(n)} - \mathbf{x}_{(n+k)}\|_V \le \frac{R^n - R^{n+k}}{1-R} \cdot \|\mathbf{x}_{(0)} - \mathbf{x}_{(1)}\|_V < \frac{R^n}{1-R} \cdot \|\mathbf{x}_{(0)} - \mathbf{x}_{(1)}\|_V.$$

(d) Mostrem que $\mathbf{x}_{(n)}$ é uma sucessão de Cauchy.

(e) Mostrem que o limite de $\mathbf{x}_{(n)}$ também está em Y.

(2.21) Prolongamento de soluções. Resumindo... Uma equação diferencial

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

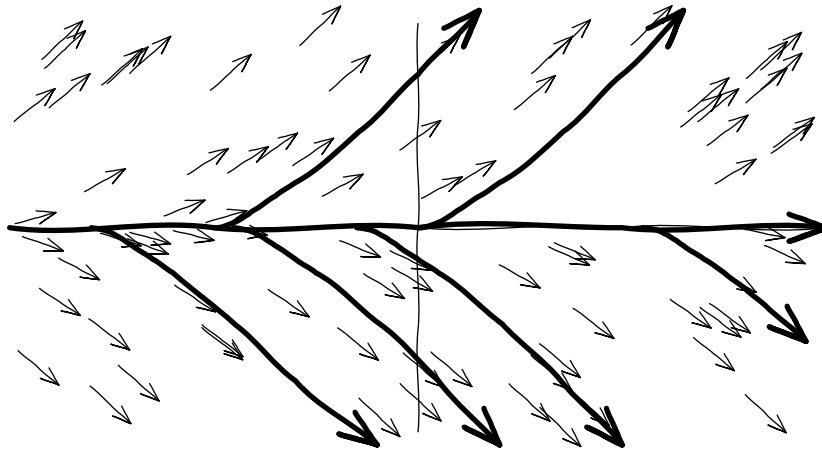
onde $\mathbf{F}$ é localmente Lipschitz, tem uma única solução definida nalguma vizinhança de t_0. Vamos mostrar que existe um intervalo máximo (contendo t_0) no qual a solução é única.

Lembram-se que no final de (2.13) encolhemos o intervalo de definição de modo a ter $C\varepsilon < 1$? De facto, em subintervalos de comprimento ε ou menor, o teorema de Picard–Lindelöf aplica-se (veem porquê?). Fazemos então o seguinte: dividimos o intervalo original em subintervalos de comprimento ε. No subintervalo que contém a condição inicial, encontramos a (única) solução, e usamo-la para decidir a condição inicial no subintervalo à esquerda e no à direita. Dessa forma, vamos prolongando a solução para a esquerda e para a direita, sempre com solução única (porquê?). Só somos forçados a parar quando saímos do intervalo original, ou do conjunto onde a constante de Lipschitz C é válida.

Assim, vemos que há apenas duas formas de perder unicidade de solução: ou ao longo de t chegamos a um ponto onde $\mathbf{F}$ não é localmente Lipschitz, ou $\mathbf{x}$ "foge" de qualquer conjunto limitado (isto é, tem uma assíntota em alguma das variáveis).

(2.22) *Exercício.* Considerem a equação $y' = -e^{-y}$.

(a) Encontrem conjuntos nos quais se aplique o teorema de Picard–Lindelöf.

(b) Qual a solução geral da equação? Contradiz alguma das nossas conclusões sobre possibilidade de prolongamento de soluções?

(2.23) *Exercício.* Considerem a equação diferencial

$$y' = y^{1/3}.$$

(a) Qual a função $F(t, y)$ correspondente a esta equação?

(b) Encontrem a solução desta equação cuja condição inicial é $y(1) = 1$. Mostrem que essa solução está definida para todo o $t \in \mathbb{R}$. Qual o seu valor em $t = 0$?

(c) Encontrem a solução desta equação cuja condição inicial é $y(2) = 1$. Mostrem que essa solução está definida para todo o $t \in \mathbb{R}$. Qual o seu valor em $t = 1$? E em $t = 0$?

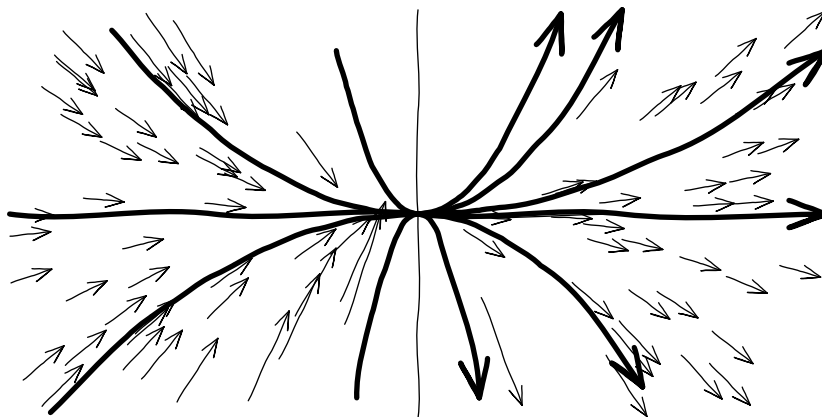
(d) Encontrem a solução desta equação cuja condição inicial é $y(3) = 1$. Mostrem que essa solução está definida para todo o $t \in \mathbb{R}$. Qual o seu valor em $t = 3$? E em $t = 0$?

(e) Encontrem todas as outras soluções desta equação. Quais delas têm $y(0) = 0$? Isto contradiz o teorema de Picard–Lindelöf?

(2.24) *Exercício.* Considerem a equação

$$t \cdot y' = 2y.$$

(a) Qual a solução geral desta equação quando $t > 0$? E quando $t < 0$?

(b) Se y for uma solução da equação definida em $t = 0$, qual é o valor de $y(0)$? Mostrem que coincide com o limite quando $t \to 0$ das soluções da alínea anterior.

(c) Usem as alíneas anteriores para construir todas as soluções da equação definidas em $\mathbb{R}$. Em que pontos do domínio se aplica o teorema de Picard–Lindelöf?

(2.25) *Exercício.* Encontrem todas as soluções de

$$y' = 2y^{1/2} \quad \text{se } y > 0 \qquad \text{e} \qquad y' = 0 \quad \text{caso contrário.}$$

(2.26) *Exercício.* Considerem de novo a equação

$$y' = 3y + 3y^{2/3}$$

do exemplo (1.27) e dos exercícios que se seguem. Que valores de t e y satisfazem as hipóteses do teorema de Picard–Lindelöf? Determinem todas as soluções da equação.

(2.27) *Exercício.* Considerem de novo as soluções que encontraram para as equações do exercício (1.29).

(a) $y' = 2y + 4y^{3/4}, \quad y(0) = 1.$

(b) $y' = 4y + 2y^{1/4}, \quad y(1) = 1.$

(c) $(\cos y)\, y' = e^t + \sin y, \quad y(1) = 0.$

(d) $y' = t\, e^{2t}\, y + 2y \log y, \quad y(2) = 1.$

Qual o maior intervalo onde as soluções são únicas? Quais as soluções fora desse intervalo?

(2.28) *Exercício.* Considerem a equação

$$y' = 1 + |y|^{1/2}.$$

(a) Mostrem que todas as soluções são funções crescentes.

(b) Encontrem expressões para as soluções, quando $y > 0$. (Pode ser útil usar $y = u^2$.)

(c) Encontrem expressões para as soluções, quando $y < 0$. (Pode ser útil usar $y = -u^2$.)

(d) Encontrem todas as soluções, e mostrem que, apesar desta equação não satisfazer as hipóteses do teorema de Picard–Lindelöf, a conclusão é verdadeira.

(2.29) *Exercício.* De facto, é possível mostrar a existência e unicidade de soluções num aberto Ω no qual

$$(t, \mathbf{y}_1), (t, \mathbf{y}_2) \in \Omega \qquad \Rightarrow \qquad \|\mathbf{F}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{y}_2)\| \le C\, \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|.$$

Para tal, consideramos o espaço V das funções definidas num intervalo $]a, b[$ contendo t_0.

(a) Se $a < 0 < b$ e $a < t < b$, mostrem que

$$\left| \int_0^t C e^{C|s| - C|t|}\, \mathrm{d}s \right| < 1 - e^{-C \max\{|a|, |b|\}}.$$

(b) Se $a < t_0 < b$ e $a < t < b$, mostrem que

$$\left| \int_{t_0}^t C e^{C|s - t_0| - C|t - t_0|}\, \mathrm{d}s \right| < 1 - e^{-C|b - a|}.$$

(c) Verifiquem que

$$\left\|\mathbf{y}\right\|'_V = \sup_{a<t<b} \left(e^{-C|t-t_0|} \left\|\mathbf{y}(t)\right\| \right).$$

é uma norma em V. Tenham cuidado para não confundir $\left\|\mathbf{y}\right\|'_V$ com $\|\mathbf{y}(t)\|$.

(d) Mostrem que

$$\left\|\Phi(\mathbf{y}_1) - \Phi(\mathbf{y}_2)\right\|'_V < \left(1 - e^{-C|b-a|}\right) \left\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\right\|'_V .$$

(e) O que podem concluir sobre existência e unicidade de soluções de $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t))$ em Ω? Que detalhes é preciso ter em conta sobre a relação entre $]a, b[$ e Ω?

(2.30) COMPARAÇÃO DE SOLUÇÕES. Digamos que $y(t)$ é solução de $y'(t) = F(t, y(t))$ com condição inicial $y(t_0) = y_0$ e que $z(t)$ é solução de $z'(t) = G(t, z(t))$ com condição inicial $z(t_0) = z_0$. Se $y_0 \leq z_0$ e $F(t, y) \leq G(t, z)$ sempre que $y \leq z$ (notem que aqui y e z são valores, não funções), conseguimos mostrar que $y(t) \leq z(t)$ sempre que $t > t_0$?

Se pudermos usar o teorema de Picard–Lindelöf, a resposta é sim.

(2.31) *Exercício.* Começamos por ver o que se passa quando $y_0 < z_0$.

(a) Mostrem que se $F(t, y(t)) > G(t, z(t))$ para algum $t > t_0$, então $z(t) - y(t)$ não pode ser uma função crescente.

(b) Mostrem que nesse caso existe algum $t_1 > t_0$ com $z'(t_1) - y'(t_1) < 0$, mas $z(t) - y(t) > 0$ no intervalo $]t_0, t_1[$.

(c) Mostrem que isso contradiria as condições sobre F e G.

(2.32) *Exercício.* Consideramos agora o que se passa se $y_0 = z_0$, e assumimos que G satisfaz as condições do teorema de Picard–Lindelöf.

(a) Mostrem que se $z(t_1) < y(t_1)$ para algum $t_1 > t_0$, é possível escolher uma solução $w(t)$ de $w'(t) = G(t, w(t))$ (notem que é a mesma equação satisfeita por $z(t)$) com $w(t_0) > z(t_0) = z_0 = y_0$ e $z(t_1) < w(t_1) < y(t_1)$.

(b) Mostrem que isso contradiria as conclusões do exercício anterior.

(2.33) *Exercício.* Considerem as equações $w' = -w$, $y' = y \sin y$, e $z' = z$, com condição inicial $w(0) = y(0) = z(0) > 0$. Mostrem que se $t > 0$, então $w(t) < y(t) < z(t)$.

(2.34) *Exercício.* Mostrem que as soluções de $y' = e^{-y^2}$ e as de $z' = z\, e^{-z^2}$ estão definidas em toda a reta real.

(2.35) Respostas de exercícios.

(2.5) $1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}$; $1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}$.
$\sum_{0\leq k<n}\frac{t^k}{k!}$. $t\mapsto e^t$.

(2.6) as anteriores $x_{(2)}$, $x_{(3)}$, $x_{(4)}$.
$1+\frac{t^2}{2}$; $1+t+\frac{t^3}{6}$; $1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}$.

(2.7) $\Phi(x)(t)=-3+\int_2^t x(s)\,\mathrm{d}s$.
-3; $3-3t$; $-3+3t-\frac{3}{2}t^2$.

(2.8) $F(t,x)=4-x$.
$\Phi(x)(t)=3+\int_1^t 4-x(s)\,\mathrm{d}s$.
$x_{(3)}(t)=1+\frac{7}{2}t-2t^2+\frac{1}{2}t^3$.

(2.9) $F(x,y)=e^{-x}+ye^{-x}$.
$\Phi(y)(x)=e-1+\int_0^x e^{-s}+y(s)\,e^{-s}\,\mathrm{d}s$.
$y_{(2)}(x)=2e-2e^{-x}-e^{1-x}+e^{-2x}$.

(2.10) $u'=t+u$; $u(2)=-2$.
$u(t)=e^{t-2}-t-1$.

(2.22) (b) $y(t)=\log(C-t)$.

(2.23) (a) $F(t,y)=y^{1/3}$.
(e) $y(t)=\left(\frac{2}{3}t+C\right)^{3/2}$ se $t\geq-\frac{3}{2}C$ e $y(t)=0$ caso contrário; ou $y(t)=0$ em todo o $\mathbb{R}$.

(2.24) (a) $y(t)=Ct^2$ (em ambos os casos).
(b) $y(0)=0$.
(c) escolher uma constante para $t\leq 0$ e outra (ou a mesma) para $t\geq 0$; aplica-se em $t\neq 0$.

(2.25) $y(t)=(t-C)^2$ se $t\geq C$ e $y(t)=0$ caso contrário. $y(t)=C$, com $C\leq 0$.

(2.26) $y\neq 0$. $y(t)=(Ce^t-1)^3$; $y(t)=0$; $y(t)=-1$. As soluções do primeiro tipo cruzam-se com as do segundo em $t=-\log C$; nesses pontos também podemos trocar de um tipo para outro.

(2.27) (a) $]2\log(2/3),+\infty[$. É possível colar com $y(t)=0$ à esquerda de $t=2\log(2/3)$, e ainda mais à esquerda também é possível colar com outras soluções da forma
$y(t)=(Ce^{t/2}-2)^4$.
(b) $]1-\frac{1}{3}\log 3,+\infty[$. É possível fazer colagens como em (a).
(c) $]-\infty,\alpha[$, onde $(\alpha-1)e^{\alpha}=1$. (d) $\mathbb{R}$.

(2.28) (b) $y(t)=u(t)^2$, onde $u(t)$ é solução implícita de $2u-2\log(1+u)=t-C$ e $t>C$.
(c) $y(t)=-u(t)^2$, onde $u(t)$ é solução implícita de $2u-2\log(1+u)=C-t$ e $t<C$.

EPISÓDIO 3

EDOs EM $\mathbb{R}^n$ E EXPONENCIAIS DE MATRIZES

Nos episódios anteriores falámos principalmente sobre equações diferenciais de primeira ordem, com uma única incógnita. Mas se tivermos um sistema como

$$\begin{cases} x_1' = & x_2, \\ x_2' = -42x_1 + 13x_2, \end{cases}$$

podemos escrevê-lo na forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}'}_{\mathbf{x}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -42 & 13 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}.$$

Considerem a mudança de variável $\mathbf{x} = S\mathbf{u}$, com

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, a equação $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ fica $S\mathbf{u}' = AS\mathbf{u}$. Se escrevermos $J = S^{-1}AS$, temos $SJ = AS$, ou seja, a equação fica $S\mathbf{u}' = SJ\mathbf{u}$ ou (multiplicando à esquerda por S^{-1}, de ambos os lados, e simplificando) $\mathbf{u}' = J\mathbf{u}$. Chegamos portanto a

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} u_1' = 7u_1, \\ u_2' = 6u_2, \end{cases}$$

As duas funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$ ficam completamente independentes, com equações que já sabemos resolver. Isto acontece quando a matriz J é diagonal (e portanto a matriz original A é diagonalizável). Quando as matrizes não são diagonalizáveis, usamos a *forma canónica de Jordan*.

Neste episódio, vamos considerar principalmente equações da forma

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + B(t),$$

onde $Y(t)$ e $B(t)$ são matrizes $n \times m$ e A é uma matriz $n \times n$. Se chamarmos $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_m(t)$ às colunas de $Y(t)$ e $\mathbf{b}_1(t), \ldots, \mathbf{b}_m(t)$ às de $B(t)$, essa equação é equivalente às m equações

$$\mathbf{y}_1'(t) = A \cdot \mathbf{y}_1(t) + \mathbf{b}_1(t), \qquad \ldots, \qquad \mathbf{y}_m'(t) = A \cdot \mathbf{y}_m(t) + \mathbf{b}_m(t).$$

Desta forma, a notação matricial permite-nos representar várias equações simultaneamente. Omitiremos por vezes a variável t em $\mathbf{y}(t)$ ou $Y(t)$, escrevendo apenas $\mathbf{y}$ ou Y.

(3.1) Exponencial de matrizes. Vamos chamar *exponencial* de A (ou de At) à solução M de

$$M'(t) = A \cdot M(t), \qquad M(0) = \mathrm{Id}\,.$$

(O teorema de Picard–Lindelöf garante que uma tal solução existe e é única. Conseguem verificar os detalhes?) Então a derivada de

$$Y(t) = M(t) \cdot Y_0 \quad \text{é} \quad Y'(t) = M'(t) \cdot Y_0 = A \cdot M(t) \cdot Y_0 = A \cdot Y(t),$$

mostrando que essa $Y(t)$ é a única solução—de novo por Picard–Lindelöf—de

$$Y'(t) = A \cdot Y(t), \qquad Y(0) = Y_0.$$

Sabendo isso, podemos verificar que (considerando s constante)

$$M(t) \cdot M(s) = M(t+s),$$

pois (verifiquem!) ambas as expressões são (a única) solução de

$$Y'(t) = A \cdot Y(t), \qquad Y(0) = M(s).$$

Por essa razão, podemos concluir que

$$M(t) \cdot M(-t) = M(0) = \mathrm{Id}\,.$$

Ou seja, $M(t)$ é uma matriz invertível e a sua inversa é $M(-t)$. Da mesma forma, podemos ver que

$$M(t) \cdot A - A \cdot M(t) = 0,$$

pois (verifiquem também aqui) ambas as expressões são (a única) solução de

$$Y'(t) = A \cdot Y(t), \qquad Y(0) = 0.$$

Concluímos portanto que

$$M(t) \cdot A = A \cdot M(t),$$

isto é, a exponencial de A comuta com A. A um nível mais profundo, a matriz $M(t)$ descreve o efeito da passagem do tempo. O facto de $M(t)$ comutar com A está relacionado com $M(t) \cdot M(s) = M(t+s)$ (que poderia traduzir-se por "a passagem de tempo s seguida da passagem de tempo t é equivalente à passagem de tempo $t+s$"). Ambos são cruciais para que uma abordagem simplificada às equações em $\mathbb{R}^n$ seja possível. (Daí focarmo-nos no caso em que A é constante.)

Resumindo tudo isto: usando a notação e^{At} em vez de $M(t)$, acabámos de mostrar que $e^{At} \cdot Y_0$ é a única solução de $Y'(t) = A \cdot Y(t)$ com condição inicial $Y(0) = Y_0$. Mostrámos (confirmem!) também as identidades

$$e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As}, \qquad (e^{At})^{-1} = e^{-At}, \qquad \text{e} \qquad e^{At} \cdot A = A \cdot e^{At} = (e^{At})'.$$

(3.2) *Exercício.* Conseguem mostrar que se A e B comutam, então

$$e^{At} \cdot B = B \cdot e^{At} \qquad \text{e} \qquad e^{At} \cdot e^{Bt} = e^{(A+B)\,t}?$$

O raciocínio é o mesmo que antes: mostrar que ambos os lados de cada equação são (a única) solução de uma mesma equação diferencial.

(3.3) A FÓRMULA DE VARIAÇÃO DAS CONSTANTES para matrizes $n \times m$ pode ser obtida com um raciocínio semelhante ao que fizemos em (1.22). Um "fator integrante" (se nos permitirmos usar tal designação neste caso) para a equação

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + B(t)$$

é e^{-At} multiplicado *à esquerda*, pois a equação torna-se

$$e^{-At} Y'(t) - e^{-At} \cdot A \cdot Y(t) = e^{-At} \cdot B(t),$$

que é equivalente (verifiquem!) a

$$\left(e^{-At} \cdot Y(t)\right)' = e^{-At} \cdot B(t).$$

Se tivermos uma condição inicial em $t = t_0$, podemos integrar e obter

$$e^{-At} \cdot Y(t) - e^{-At_0} \cdot Y(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-Ar} \cdot B(r) \, \mathrm{d}r \, .$$

Tal como no caso $n = 1$, resolvemos em ordem a $Y(t)$ e chegamos a

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-r)} \cdot B(r) \, \mathrm{d}r \, .$$

E tal como antes, podemos interpretar isto como

$$Y(t) = \text{passagem}^{t \leftarrow t_0} \cdot Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \text{passagem}^{t \leftarrow r} \cdot B(r) \, \mathrm{d}r \, .$$

(3.4) Um exemplo concreto permite-nos ilustrar tudo isto. A solução de

$$\mathbf{y}'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -4 & -12 \end{bmatrix}}_{A} \mathbf{y}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1+t \\ 2-2t \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}(t)}, \qquad \mathbf{y}(\underbrace{0}_{t_0}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_0}$$

é dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \left(e^{-At_0} \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-Ar} \mathbf{b}(r) \, \mathrm{d}r \right).$$

Em (3.20), vamos ver que

$$e^{At} = e^{-10t} \begin{bmatrix} 1+2t & t \\ -4t & 1-2t \end{bmatrix}.$$

Substituindo na função integranda, temos

$$e^{-Ar} \mathbf{b}(r) = e^{10r} \begin{bmatrix} 1-2r & -r \\ 4r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+r \\ 2-2r \end{bmatrix} = e^{10r} \begin{bmatrix} 1-3r \\ 2+6r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{10r}(1-3r) \\ e^{10r}(2+6r) \end{bmatrix}.$$

Assim, o integral fica

$$\int_0^t e^{-Ar} \mathbf{b}(r) \, \mathrm{d}r = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{10r}(1-3r) \\ e^{10r}(2+6r) \end{bmatrix} \mathrm{d}r = \begin{bmatrix} \int_0^t e^{10r}(1-3r) \, \mathrm{d}r \\ \int_0^t e^{10r}(2+6r) \, \mathrm{d}r \end{bmatrix}.$$

(3.5) *Exercício.* Terminem as contas e obtenham a expressão simplificada (sem integrais) para $\mathbf{y}(t)$.

(3.6) Cálculo de e^{At}. Há várias estratégias para calcular e^{At}. Começamos por observar que se $Y(t)$ é uma solução de $Y'(t) = A \cdot Y(t)$, então $Y(t) = e^{At} \cdot Y(0)$ permite-nos concluir que $Y(t)$ é invertível exatamente quando $Y(0)$ o for (e portanto, quando qualquer outra $Y(t_0)$ o for).

Assim, suponhamos que A é uma matriz $n \times n$ e que temos n soluções $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$ de

$$\mathbf{y}'(t) = A \cdot \mathbf{y}(t).$$

Então a matriz $Y(t)$ com colunas $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$ é uma solução de

$$Y'(t) = A \cdot Y(t),$$

logo é da forma $Y(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot Y(t_0)$. Se os vetores $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$, para algum t *fixo*, forem linearmente independentes, a matriz $Y(t)$ será invertível. E vimos há pouco que nesse caso a matriz $Y(t_0)$ é invertível. Somos assim levados a concluir que

$$e^{A(t-t_0)} = Y(t) \cdot Y(t_0)^{-1}.$$

Esta construção de e^{At} corresponde à *matriz wronskiana*. Se $Z(t)$ for uma solução de

$$Z'(t) = A \cdot Z(t),$$

podemos escrever

$$Z(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot Z(t_0) = Y(t) \cdot Y(t_0)^{-1} \cdot Z(t_0).$$

(3.7) Exponencial de matriz diagonal. Voltemos então a um exemplo do início deste episódio. Queremos encontrar todas as soluções do sistema

$$\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}, \qquad \text{onde } A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, é fácil ver que $\mathbf{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ gera os vetores próprios com $\lambda = 7$ e que $\mathbf{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ gera os vetores próprios com $\lambda = 6$.

Se $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de A com valor próprio λ, então $\mathbf{y} = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ é uma solução de $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$. Com efeito, temos

$$\mathbf{y}' = \left(e^{\lambda t} \cdot \mathbf{v}\right)' = \left(e^{\lambda t}\right)' \cdot \mathbf{v} = e^{\lambda t} \cdot \underbrace{\lambda \mathbf{v}}_{A\mathbf{v}} = e^{\lambda t} \cdot A\mathbf{v} = A \cdot e^{\lambda t}\mathbf{v} = A \cdot \mathbf{y}.$$

No caso da nossa equação, temos então duas soluções (que são linearmente independentes pois os próprios vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ o são):

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{7t}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} e^{7t} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y}_2(t) = e^{6t}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{6t} \end{bmatrix}.$$

Com estes dois vetores, podemos construir a matriz

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) & \mathbf{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{bmatrix}.$$

Como neste caso $Y(0) = \mathrm{Id}$, vemos que $e^{At} = Y(t) \cdot Y(0)^{-1} = Y(t)$. Ou seja, a matriz exponencial associada a uma matriz diagonal é também ela uma matriz diagonal: cada valor próprio λ é substituído por $e^{\lambda t}$.

(3.8) *Exercício.* Usem a fórmula da variação das constantes em $\mathbb{R}^2$ para resolver

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) + \begin{bmatrix} t \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{0}.$$

Comparem com o que obteriam escrevendo como sistemas de equações a uma variável e resolvendo cada equação usando (1.22).

(3.9) *Exercício.* Vamos provar que se $A \cdot S = S \cdot B$, então $e^{At} \cdot S = S \cdot e^{Bt}$. Vamos usar um raciocínio semelhante ao que fizemos no exercício (3.2) e imediatamente antes. Tanto $e^{At} \cdot S - S \cdot e^{Bt}$ como a matriz 0 são (a única) solução de $Z'(t) = A \cdot Z(t)$ com $Z(0) = 0$. Conseguem preencher os detalhes que faltam?

(3.10) *Exercício.* Diagonalizem as seguintes matrizes e determinem as suas exponenciais.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} -1 & -12 \\ 4 & 13 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} -9 & 10 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}; \qquad \text{(d)} \begin{bmatrix} -9 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Notem que, para ser mais fácil inverter a matriz dos vetores próprios, pode ser boa ideia escolhê-los de modo a que a matriz tenha determinante 1.)

(3.11) *Exercício.* Resolvam os seguintes sistemas de equações diferenciais com t como variável independente:

(a) $x_1' = 11x_1 + 3x_2, \quad x_2' = -6x_1 + 2x_2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0;$
(b) $x_1' = -x_1 - 12x_2 + 3t, \quad x_2' = 4x_1 + 13x_2 - 2t, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0;$
(c) $x_1' = -9x_1 + 10x_2, \quad x_2' = -8x_1 + 9x_2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1;$
(d) $x_1' = -9x_1 + 4x_2 + t, \quad x_2' = -5x_1 + t, \quad x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 6.$

(3.12) Vejamos mais um exemplo. Se

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix},$$

então $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, e $\mathbf{e}_3$ (os vetores da base canónica) são vetores próprios de A, pois $A \cdot \mathbf{e}_1 = 4\mathbf{e}_1$, $A \cdot \mathbf{e}_2 = -3\mathbf{e}_2$, e $A \cdot \mathbf{e}_3 = 11\mathbf{e}_3$. Por isso,

$$e^{At} \cdot \mathbf{e}_1 = e^{4t}\,\mathbf{e}_1, \qquad e^{At} \cdot \mathbf{e}_2 = e^{-3t}\,\mathbf{e}_2, \qquad \text{e} \qquad e^{At} \cdot \mathbf{e}_3 = e^{11t}\,\mathbf{e}_3$$

e concluímos que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{11t} \end{bmatrix}.$$

(3.13) Exponencial de bloco de Jordan. Suponham agora que temos

$$\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}, \qquad \text{onde } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para esta matriz A, temos apenas um vetor próprio independente: $\mathbf{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Pelo raciocínio que fizemos há pouco, sabemos que $\mathbf{y}_1(t) = e^{0t}\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ é uma solução da equação. Como a solução também é dada pela exponencial, obtemos

$$e^{At} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1.$$

Temos $A \cdot \mathbf{v}_2 = 0\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$. Queremos calcular $\mathbf{y}_2(t) = e^{At} \cdot \mathbf{v}_2$. Mas

$$\mathbf{y}_2'(t) = \left(e^{At} \cdot \mathbf{v}_2\right)' = e^{At} \cdot \underbrace{A \cdot \mathbf{v}_2}_{\mathbf{v}_1} = e^{At} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1.$$

Integrando ambos os lados da equação entre 0 e t, obtemos

$$\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{y}_2(0) + t\mathbf{v}_1, \quad \text{ou seja, } e^{At} \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1.$$

Se construirmos uma matriz com colunas $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t)$,

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) & \mathbf{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

temos, mais uma vez, $Y(0) = \mathrm{Id}$. Portanto, $e^{At} = Y(t) \cdot Y(0)^{-1} = Y(t)$.

É razoável perguntar o que acontece quando o valor próprio não é 0. Por exemplo, consideremos

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Mas nesse caso $A = B - 7\,\mathrm{Id}$ *tem* valor próprio 0, por isso

$$e^{Bt} \cdot e^{-7t} = e^{Bt} \cdot e^{-7\,\mathrm{Id}\,t} = e^{(B-7\,\mathrm{Id})\,t} = e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{logo } e^{Bt} = e^{7t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideremos agora o *bloco de Jordan* $n \times n$ com valor próprio $\lambda = 0$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se chamarmos $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_5$ aos vetores da base canónica, podemos ver que $N \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k-1}$ quando $k > 1$ e $N \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$. Como é que isso ajuda?

Escrevendo $\mathbf{y}_k(t) = e^{Nt} \cdot \mathbf{e}_k$, já vimos que $\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_1$. Temos ainda

$$\mathbf{y}_k'(t) = \left(e^{Nt} \cdot \mathbf{e}_k\right)' = e^{Nt} \cdot N \cdot \mathbf{e}_k = e^{Nt} \cdot (0\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k-1}) = e^{Nt} \cdot \mathbf{e}_{k-1} = \mathbf{y}_{k-1}(t).$$

Assim, temos

$$\mathbf{y}_3'(t) = \mathbf{y}_2(t) = \mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_1.$$

Primitivando e usando $\mathbf{y}_3(0) = \mathbf{e}_3$, chegamos a

$$\mathbf{y}_3(t) = \mathbf{e}_3 + t\mathbf{e}_2 + \tfrac{t^2}{2}\mathbf{e}_1.$$

Com o mesmo género de raciocínio, obtemos ainda

$$\mathbf{y}_4(t) = \mathbf{e}_4 + t\mathbf{e}_3 + \tfrac{t^2}{2}\mathbf{e}_2 + \tfrac{t^3}{3!}\mathbf{e}_1;$$
$$\mathbf{y}_5(t) = \mathbf{e}_5 + t\mathbf{e}_4 + \tfrac{t^2}{2}\mathbf{e}_3 + \tfrac{t^3}{3!}\mathbf{e}_2 + \tfrac{t^4}{4!}\mathbf{e}_1.$$

Construímos agora uma matriz a partir dos $\mathbf{y}_k(t)$:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) & \mathbf{y}_2(t) & \mathbf{y}_3(t) & \mathbf{y}_4(t) & \mathbf{y}_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \frac{t^4}{4!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $Y(0) = \mathrm{Id}$, concluímos que $e^{Nt} = Y(t) \cdot Y(0)^{-1} = Y(t)$.

Se quisermos considerar o caso geral de

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

podemos observar que $J - \lambda\,\mathrm{Id} = N$. Portanto,

$$e^{Jt} = e^{(\lambda\,\mathrm{Id}+N)\,t} = e^{\lambda\,\mathrm{Id}\,t} \cdot e^{Nt} = e^{\lambda t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \frac{t^4}{4!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, se

$$J = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

então a sua exponencial é

$$e^{Jt} = e^{7t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \frac{t^4}{4!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3.14) Outro caso relevante é o das matrizes que se podem decompor como

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

(onde A e B são matrizes quadradas e cada 0 é uma matriz nula com as dimensões necessárias para que C seja outra matriz quadrada). Vamos mostrar que

$$e^{Ct} = \left[\begin{array}{c|c} e^{At} & 0 \\ \hline 0 & e^{Bt} \end{array}\right].$$

Lembram-se da definição da exponencial de matrizes? Dissemos que e^{Ct} é a (única) solução de $M'(t) = C \cdot M(t)$ com $M(0) = \mathrm{Id}$. Para provar que e^{Ct} é realmente dada pela fórmula acima, basta verificar essas duas condições:

$$\left(\left[\begin{array}{c|c} e^{At} & 0 \\ \hline 0 & e^{Bt} \end{array}\right]\right)' = \left[\begin{array}{c|c} (e^{At})' & 0 \\ \hline 0 & (e^{Bt})' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A \cdot e^{At} & 0 \\ \hline 0 & B \cdot e^{Bt} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} e^{At} & 0 \\ \hline 0 & e^{Bt} \end{array}\right];$$

$$\left[\begin{array}{c|c} e^{A0} & 0 \\ \hline 0 & e^{B0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{Id} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Id} \end{array}\right] = \mathrm{Id}.$$

(Conseguem verificar que isto chega?)

(3.15) *Exercício.* Determinem as exponenciais das seguintes matrizes.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(3.16) *Exercício.* Resolvam os seguintes sistemas de equações diferenciais com t como variável independente:

(a) $x_1' = 3x_1 + x_2, \quad x_2' = 3x_2 + 1, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0;$

(b) $x_1' = 5x_1, \quad x_2' = 4x_2 + x_3, \quad x_2' = 4x_3, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 1;$

(c) $x_1' = -x_1 + t, \quad x_2' = -x_2 + x_3, \quad x_3' = -x_3, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1 \quad x_3(0) = 2.$

(3.17) Resta a pergunta: e como fazemos quando a matriz não é diagonal nem um bloco de Jordan? Podemos ter a sorte de encontrar soluções suficientes para usar a matriz wronskiana: $e^{At} = Y(t) \cdot Y(0)^{-1}$. Ou podemos tentar encontrar a forma de Jordan, e aproveitar o que já sabemos sobre exponenciais de matrizes diagonais e de blocos de Jordan. Felizmente, na prática a questão é bastante menos técnica do que esta longa discussão poderia fazer suspeitar. Em todo o caso, vamos dedicar algum tempo a uns quantos exemplos.

(3.18) A forma de Jordan de uma matriz. Antes de mais, o que é uma forma de Jordan de uma matriz? É o que usamos quando gostávamos de ter uma diagonalização, mas não há vetores próprios suficientes. Uma *matriz de Jordan* é uma matriz com blocos de Jordan ao

longo da diagonal, e zeros em todas as outras componentes. Assim,

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cc|c|c} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

são matrizes de Jordan, enquanto que

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 11 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 7 \end{array}\right]$$

não são.

Não vamos demonstrar todos os detalhes. O que nos interessa aqui não é a demonstração; o que realmente queremos é uma estratégia que nos permita obter uma forma de Jordan. Vamos descrever por alto uma tal estratégia, e depois explicá-la com uns quantos exemplos.

Temos então uma certa matriz A. A primeira coisa a fazer é determinar o polinómio característico de A. Cada valor próprio λ ocorre com uma certa multiplicidade (algébrica) nesse polinómio. Por exemplo, no polinómio $(\lambda - 7)^4$, o valor $\lambda = 7$ tem multiplicidade 4.

Para cada valor próprio λ, calculamos a matriz $A - \lambda\,\mathrm{Id}$. Um *vetor próprio generalizado* de A com valor próprio λ é um vetor no núcleo de $(A - \lambda\,\mathrm{Id})^k$, para algum $k \geq 1$. Dois pontos cruciais: quando aumentamos k nunca "perdemos" vetores próprios generalizados, e nunca é preciso usar k maior que a multiplicidade algébrica de λ.

Então a estratégia será a seguinte: começamos por determinar a nulidade de $A - \lambda\,\mathrm{Id}$. (Recordem que a nulidade de uma matriz é o número de variáveis livres—ou de colunas sem pivot—e é também a dimensão do núcleo. O núcleo de $A - \lambda\,\mathrm{Id}$ consiste nos vetores próprios habituais.) Se houver vetores próprios suficientes, determinamo-los e temos o problema resolvido. Senão, determinamos a nulidade de $(A - \lambda\,\mathrm{Id})^2$, $(A - \lambda\,\mathrm{Id})^3$, $(A - \lambda\,\mathrm{Id})^4$, etc., até que coincida com a multiplicidade algébrica. Quando isso acontecer, significa que não vale a pena aumentar o expoente.

Imaginem que (para uma matriz A) o valor próprio $\lambda = 7$ tem multiplicidade (algébrica) 4. Os blocos de Jordan para $\lambda = 7$ podem ser de vários formatos diferentes:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 7 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|c|c} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right], \quad \text{etc.}$$

Se $A - 7\,\mathrm{Id}$ tiver nulidade 4, significa que conseguimos encontrar quatro vetores próprios independentes e portanto podemos diagonalizar A. Obtemos blocos como na primeira matriz mostrada.

Se $A - 7\,\mathrm{Id}$ tiver nulidade 3, temos que subir o expoente. Como a nulidade de $(A - 7\,\mathrm{Id})^2$ é 4, podemos parar. Escolhemos então qualquer vetor $\mathbf{v}_2$ no núcleo de $(A - 7\,\mathrm{Id})^2$. Em

seguida, escolhemos $\mathbf{v}_1 = (A - 7\,\mathrm{Id}) \cdot \mathbf{v}_2$. (Tipicamente, $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$; se não for, temos de voltar atrás e escolher outro $\mathbf{v}_2$.) A consequência dessa escolha é que $(A - 7\,\mathrm{Id}) \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, ou $A \cdot \mathbf{v}_2 = 7\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$. Mas recordem que a nulidade de $A - 7\,\mathrm{Id}$ era 3. Este $\mathbf{v}_1$ é um vetor do núcleo de $A - 7\,\mathrm{Id}$; podemos encontrar mais dois: serão o $\mathbf{v}_3$ e o $\mathbf{v}_4$. Ora, escrevendo isto em termos de matrizes, ficamos com algo como

$$A \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\cdot\mathbf{v}_1 & A\cdot\mathbf{v}_2 & A\cdot\mathbf{v}_3 & A\cdot\mathbf{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\mathbf{v}_1 & 7\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1 & 7\mathbf{v}_3 & 7\mathbf{v}_4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

que corresponde à segunda matriz mostrada acima.

Como imaginam, tentar descrever os outros casos em termos genéricos fica rapidamente monótono ou confuso. É melhor passarmos a alguns exemplos concretos.

(3.19) Primeiro exemplo. Começamos com um caso relativamente simples, o da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ -12 & -12 & -5 \end{bmatrix}.$$

O polinómio característico de A é $(\lambda - 1)(\lambda + 5)^2$.

Os vetores próprios com $\lambda = 1$ são obtidos resolvendo o sistema $(A - \mathrm{Id}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ -12 & -12 & -6 & 0 \end{array}\right], \text{ cujas soluções são os múltiplos de } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda = -5$, podemos verificar que $A + 5\,\mathrm{Id}$ tem nulidade 2. Como coincide com a multiplicidade algébrica, podemos calcular imediatamente os vetores próprios, resolvendo $(A + 5\,\mathrm{Id}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} L_1/6 \\ \\ L_3 + 2L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

As soluções deste sistema são dadas por

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_3} = x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3.$$

Ou seja, encontrámos dois vetores próprios independentes com $\lambda = -5$.

Dissemos antes que se $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de A com valor próprio λ, então $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ é uma solução de $\mathbf{y}'(t) = A \cdot \mathbf{y}(t)$. Como encontrámos três vetores próprios independentes ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, e $\mathbf{v}_3$), encontrámos também três soluções:

$$\mathbf{y}_1(t) = e^t\,\mathbf{v}_1 = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_2(t) = e^{-5t}\,\mathbf{v}_2 = e^{-5t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{e} \qquad \mathbf{y}_3(t) = e^{-5t}\,\mathbf{v}_3 = e^{-5t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construímos uma matriz $Y(t)$ com estas três soluções como colunas:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) & \mathbf{y}_2(t) & \mathbf{y}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & -e^{-5t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} & 0 \\ -2e^t & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

Observando que a matriz $Y(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$ é invertível (pois já vimos que os três vetores *são*, de facto, uma base) e recordando o que dissemos sobre a exponencial de matrizes, concluímos que $e^{At} = Y(t) \cdot Y(0)^{-1}$. Ou seja, obtemos

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & -e^{-5t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} & 0 \\ -2e^t & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Há outra forma de prosseguir após a determinação dos vetores próprios. Consiste em observar que, se construirmos uma matriz $S = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$ com os três vetores próprios como colunas, então

$$\begin{aligned} A \cdot S &= A \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cdot \mathbf{v}_1 & A \cdot \mathbf{v}_2 & A \cdot \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & -5\mathbf{v}_2 & -5\mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{D} = S \cdot D. \end{aligned}$$

(Este é o raciocínio que está por trás da definição tradicional de diagonalização de matrizes.) Como $A \cdot S = S \cdot D$, temos $e^{At} \cdot S = S \cdot e^{Dt}$. Mas como D é uma matriz diagonal, já sabemos que

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

Portanto, $e^{At} = S \cdot e^{Dt} \cdot S^{-1}$, ou

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Se fizerem o primeiro produto de matrizes, podem ver que obtemos a mesma expressão que tínhamos antes. (E portanto, podem escolher qual dos dois métodos preferem usar.)

(3.20) Segundo exemplo. Quando a matriz é diagonalizável, a situação é sempre semelhante ao que fizemos com a matriz A. Mas o que se passa se a matriz não for diagonalizável? Consideremos a matriz

$$B = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -4 & -12 \end{bmatrix},$$

cujo polinómio característico é $(\lambda+10)^2$. Temos portanto um único valor próprio, $\lambda = -10$, com multiplicidade algébrica 2. Como a matriz

$$B - \lambda\,\mathrm{Id} = B + 10\,\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

tem nulidade 1 (lembram-se como calcular a nulidade?), temos de considerar $(B+10\,\mathrm{Id})^2$, cuja nulidade é 2 (pois trata-se da matriz nula).

Escolhemos então qualquer $\mathbf{v}_2$ no núcleo de $(B+10\,\mathrm{Id})^2$. Por exemplo, $\mathbf{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ (para quê complicar?). Em seguida definimos $\mathbf{v}_1 = (B+10\,\mathrm{Id})\cdot\mathbf{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$.

Essas escolhas garantem que $(B+10\,\mathrm{Id})\cdot\mathbf{v}_1 = (B+10\,\mathrm{Id})^2\cdot\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Por conseguinte, $B\cdot\mathbf{v}_1 = -10\mathbf{v}_1$ e $B\cdot\mathbf{v}_2 = -10\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$ (verifiquem!). Usando esses dois vetores, obtemos duas soluções de $\mathbf{y}'(t) = B\cdot\mathbf{y}(t)$:

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{-10t}\,\mathbf{v}_1 = e^{-10t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y}_2(t) = e^{-10t}\,(\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1) = e^{-10t}\begin{bmatrix} t \\ 1-2t \end{bmatrix}.$$

Se construirmos a matriz $Y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) & \mathbf{y}_2(t) \end{bmatrix}$, obtemos

$$e^{Bt} = Y(t)\cdot Y(0)^{-1} = e^{-10t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -2 & 1-2t \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Alternativamente, depois de termos escolhido $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, podemos obter a forma de Jordan para B. Pondo $S = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{aligned} B\cdot S &= B\cdot\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\cdot\mathbf{v}_1 & B\cdot\mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -10\mathbf{v}_1 & -10\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}}_{J} = S\cdot J. \end{aligned}$$

A exponencial de J é conhecida, por isso podemos dizer

$$e^{Bt} = S\cdot e^{Jt}\cdot S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\cdot e^{-10t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Se fizerem as contas, podem confirmar que chegamos de facto ao mesmo resultado que no parágrafo anterior.

(3.21) Terceiro exemplo. Experimentemos agora com a matriz

$$C = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -12 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

cujo polinómio característico (verifiquem) é $(\lambda+2)^3$. Temos portanto um único valor próprio, $\lambda=-2$, com multiplicidade (algébrica) 3.

Como a nulidade de

$$C+2\,\mathrm{Id}=\begin{bmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

é 2 (que é menor que a multiplicidade algébrica, 3), temos de considerar $(C+2\,\mathrm{Id})^2$ que tem nulidade 3 (pois é a matriz nula).

Queremos escolher um $\mathbf{v}_2$ no núcleo de $(C+2\,\mathrm{Id})^2$ mas *fora* do núcleo de $C+2\,\mathrm{Id}$—de contrário $\mathbf{v}_1=(C+2\,\mathrm{Id})\cdot\mathbf{v}_2$ seria $\mathbf{0}$, e teríamos de voltar atrás para escolher outro $\mathbf{v}_2$. Uma das (imensas) escolhas possíveis é

$$\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v}_1=(C+2\,\mathrm{Id})\cdot\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Com isto, encontrámos um dos dois vetores próprios independentes (são dois, porque a nulidade de $C+2\,\mathrm{Id}$ era 2). Precisamos de encontrar o outro (que será o $\mathbf{v}_3$). Para tal, precisamos das soluções de $(C+2\,\mathrm{Id})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0}$. Através do método de Gauss,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} \\ \\ L_3-2L_1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

vemos que as soluções correspondem a $-6x_1+x_2+3x_3=0$. Entre as soluções, temos que escolher uma independente de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Pode ser, por exemplo,

$$\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O resultado de tudo isto é que encontrámos três vetores linearmente independentes. Como $(C+2\,\mathrm{Id})\cdot\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$, temos $C\cdot\mathbf{v}_1=-2\mathbf{v}_1$. Como $(C+2\,\mathrm{Id})\cdot\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1$, temos $C\cdot\mathbf{v}_2=-2\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1$. Como $(C+2\,\mathrm{Id})\cdot\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$, temos $C\cdot\mathbf{v}_3=-2\mathbf{v}_3$.

A estes três vetores podemos associar soluções de $\mathbf{y}'(t)=C\cdot\mathbf{y}(t)$:

$$\mathbf{y}_1(t)=e^{-2t}\mathbf{v}_1=e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_2(t)=e^{-2t}(\mathbf{v}_2+t\mathbf{v}_1)=e^{-2t}\begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 2t \end{bmatrix},$$

$$\text{e} \qquad \mathbf{y}_3(t)=e^{-2t}\mathbf{v}_3=e^{-2t}\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como no exemplo anterior, construímos $Y(t)=\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) & \mathbf{y}_2(t) & \mathbf{y}_3(t) \end{bmatrix}$ e obtemos

$$e^{Ct}=Y(t)\cdot Y(0)^{-1}=\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & -3e^{-2t} \\ 2e^{-2t} & 2te^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Alternativamente, podemos construir explicitamente uma forma de Jordan para a matriz C. Com efeito, pondo $S = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{aligned} C \cdot S &= C \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \cdot \mathbf{v}_1 & C \cdot \mathbf{v}_2 & C \cdot \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2\mathbf{v}_1 & -2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 & -2\mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right]}_{J} = S \cdot J. \end{aligned}$$

Ora, como a matriz J é formada por dois blocos de Jordan, temos

$$e^{Jt} = \left[\begin{array}{c|c} e^{\left[\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right]t} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & e^{[-2]t} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & e^{-2t} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{-2t} \end{array}\right].$$

Temos então $e^{Ct} = S \cdot e^{Jt} \cdot S^{-1}$. Se fizerem o primeiro produto, podem ver que esta expressão para e^{Ct} realmente coincide com a que obtivemos acima.

(3.22) Quarto exemplo. Mais um exemplo, agora com a matriz

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -12 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

O seu polinómio característico é $(\lambda - 1)(\lambda + 3)^2$.

Os vetores próprios com $\lambda = 1$ são os vetores no núcleo de $F - \mathrm{Id}$. Resolvendo o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ -12 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right], \text{ obtemos os múltiplos de } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Como a nulidade de

$$F + 3\,\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é 1 (menor que a multiplicidade algébrica 2), temos que considerar

$$(F + 3\,\mathrm{Id})^2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -48 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tem nulidade 2. Vamos então escolher qualquer $\mathbf{v}_3$ no seu núcleo, exigindo apenas que $\mathbf{v}_2 = (F + 3\,\mathrm{Id}) \cdot \mathbf{v}_3$ seja não-nulo. Por exemplo, tomemos

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v}_2 = (F + 3\,\mathrm{Id}) \cdot \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Se, por coincidência, obtivéssemos $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, teríamos que voltar atrás para escolher outro $\mathbf{v}_3$.)

Encontrámos assim três vetores linearmente independentes. Como $(F - \mathrm{Id}) \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, temos $F \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$. Como $(F + 3\,\mathrm{Id}) \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, temos $F \cdot \mathbf{v}_2 = -3\mathbf{v}_2$. E como $(F + 3\,\mathrm{Id}) \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$, temos $F \cdot \mathbf{v}_3 = -3\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2$.

A estes três vetores podemos associar soluções de $\mathbf{y}'(t) = F \cdot \mathbf{y}(t)$:

$$\mathbf{y}_1(t) = e^t\,\mathbf{v}_1 = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_2(t) = e^{-3t}\,\mathbf{v}_2 = e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{e} \qquad \mathbf{y}_3(t) = e^{-3t}\,(\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_2) = e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como nos outros exemplos, construímos $Y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) & \mathbf{y}_2(t) & \mathbf{y}_3(t) \end{bmatrix}$ e obtemos

$$e^{Ft} = Y(t) \cdot Y(0)^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ -3e^t & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Alternativamente, podemos construir explicitamente uma forma de Jordan para a matriz F. Pondo $S = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{aligned} F \cdot S &= F \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \cdot \mathbf{v}_1 & F \cdot \mathbf{v}_2 & F \cdot \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & -3\mathbf{v}_2 & -3\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right]}_{J} = S \cdot J. \end{aligned}$$

Como a matriz J é formada por dois blocos de Jordan, temos

$$e^{Jt} = \left[\begin{array}{c|cc} e^{[1]t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$e^{\left[\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right]t}$}} \\ 0 & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} e^t & 0 \quad 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Temos também $e^{Ft} = S \cdot e^{Jt} \cdot S^{-1}$.

(3.23) Quinto exemplo. Para um último exemplo, consideramos a matriz

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 10 & -9 & 6 \end{bmatrix},$$

cujo polinómio característico (verifiquem) é $(\lambda - 3)^3$. Vemos que G tem um único valor próprio, $\lambda = 3$, com multiplicidade (algébrica) 3.

Como a nulidade de

$$G - 3\,\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 10 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

é 1 (confirmam?), teremos de considerar $(G - 3\,\mathrm{Id})^2$. Mas esta matriz tem nulidade 2 (concordam?), que é ainda inferior à multiplicidade algébrica. Por isso, teremos que ir até $(G - 3\,\mathrm{Id})^3$, que é a matriz nula.

Assim, escolhemos um qualquer $\mathbf{v}_3$ e definimos $\mathbf{v}_2 = (G - 3\,\mathrm{Id}) \cdot \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_1 = (G - 3\,\mathrm{Id}) \cdot \mathbf{v}_2$, exigindo apenas que resulte $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. Por exemplo, tomemos

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = (G - 3\,\mathrm{Id}) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_1 = (G - 3\,\mathrm{Id}) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Azar—chegámos a $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Tentemos de novo:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = (G - 3\,\mathrm{Id}) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_1 = (G - 3\,\mathrm{Id}) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encontrámos três vetores linearmente independentes. Como $(G - 3\,\mathrm{Id}) \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, temos $G \cdot \mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_1$. Como $(G - 3\,\mathrm{Id}) \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, temos $G \cdot \mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$. E como $(G - 3\,\mathrm{Id}) \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$, temos $G \cdot \mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2$.

A esses vetores podemos associar estas soluções de $\mathbf{y}'(t) = G \cdot \mathbf{y}(t)$:

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{3t}\,\mathbf{v}_1 = e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_2(t) = e^{3t}\,(\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1) = e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 + t \\ 10 + 3t \end{bmatrix},$$

$$\text{e} \qquad \mathbf{y}_3(t) = e^{3t}\left(\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_2 + \tfrac{t^2}{2}\mathbf{v}_1\right) = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3t + \frac{t^2}{2} \\ 10t + 3\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Como nos exemplos anteriores, construímos uma matriz $Y(t)$ a partir destas três soluções,

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{3t} \\ e^{3t} & (3+t)e^{3t} & \left(3t + \frac{t^2}{2}\right)e^{3t} \\ 3e^{3t} & (10+3t)e^{3t} & \left(10t + 3\frac{t^2}{2}\right)e^{3t} \end{bmatrix},$$

e concluímos que $e^{Gt} = Y(t) \cdot Y(0)^{-1}$.

Ou então construímos a matriz $S = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$ e calculamos

$$\begin{aligned} G \cdot S = G \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G \cdot \mathbf{v}_1 & G \cdot \mathbf{v}_2 & G \cdot \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\mathbf{v}_1 & 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 & 3\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{J} = S \cdot J. \end{aligned}$$

Então, como $e^{Gt} = S \cdot e^{Jt} \cdot S^{-1}$ e J é um bloco de Jordan, teremos

$$e^{Gt} = S \cdot e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot S^{-1}.$$

(3.24) *Exercício.* Determinem as formas de Jordan e as exponenciais das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} -9 & 9 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 5 \\ 4 & -7 & -7 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -4 & 2 & -7 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$;

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; (h) $\begin{bmatrix} -2 & 7 & -1 \\ -3 & 7 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Os valores próprios da matriz (c) são 0 e -1. Os valores próprios da matriz (d) são -2 e -3. Os valores próprios da matriz (e) são ± 2. As matrizes (g) e (h) só têm um valor próprio.

(3.25) *Exercício.* Resolvam os seguintes sistemas de equações diferenciais com t como variável independente:

(a) $x_1' = -9x_1 + 9x_2$, $x_2' = -4x_1 + 3x_2$, $x_1(0) = 7$, $x_2(0) = 5$;
(b) $x_1' = 8x_1 + x_2 + 1$, $x_2' = -9x_1 + 2x_2 - 3$, $x_1(0) = -3$, $x_2(0) = 10$;
(c) $x_1' = -2x_1 + 7x_2 - x_3 - 2$, $x_2' = -3x_1 + 7x_2 - x_3 - 1$, $x_3' = -x_1 + x_2 + x_3 + 1$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = -1$;
(d) $x_1' = -2x_1 + 7x_2 - x_3 + 1$, $x_2' = -3x_1 + 7x_2 - x_3$, $x_3' = -x_1 + x_2 + x_3 - 1$, $x_1(0) = -2$, $x_2(0) = -1$, $x_3(0) = 1$;
(e) $x_1' = -2x_1 + 7x_2 - x_3 + 1$, $x_2' = -3x_1 + 7x_2 - x_3$, $x_3' = -x_1 + x_2 + x_3 - 1$, $x_1(2) = -2$, $x_2(2) = -1$, $x_3(2) = 1$.

(3.26) COEFICIENTES NÃO CONSTANTES. É razoável perguntar o que se passa quando os coeficientes da equação não são constantes, como em

$$Y'(t) = A(t)\,Y(t) + B(t), \qquad Y(t_0) = Y_0.$$

Vamos admitir que exista algum análogo $W(t)$ da exponencial de matrizes, satisfazendo $W'(t) = A(t)\,W(t)$. A solução seria da forma $Y(t) = W(t)\,Z(t)$? Se sim, teríamos

$$Y'(t) = W'(t)\,Z(t) + W(t)\,Z'(t) = A(t)\,W(t)\,Z(t) + W(t)\,Z'(t) = A(t)\,Y(t) + W(t)\,Z'(t).$$

Por outro lado, $Y'(t) = A(t)\,Y(t) + B(t)$, o que nos leva a concluir que $B(t) = W(t)\,Z'(t)$. Assim, *desde que $W(t)$ seja invertível*, temos $Z'(t) = W(t)^{-1}\,B(t)$ e conseguimos obter $Z(t)$

por primitivação, usando ainda $Z(t_0) = W(t_0)^{-1}\, Y(t_0)$ (de onde vem isso?):

$$Y(t) = W(t)\left(W(t_0)^{-1}\, Y_0 + \int_{t_0}^{t} W(r)^{-1}\, B(r)\,\mathrm{d}r\right).$$

(De acordo?) É uma simples variante da fórmula da variação das constantes, desta vez com a $W(t)$ em vez da exponencial.

Para construir $W(t)$ precisamos de várias soluções (uma para cada coluna) de $\mathbf{w}'(t) = A(t)\,\mathbf{w}(t)$, e precisamos que sejam linearmente independentes em t_0 (para assegurar que $W(t)$ é invertível numa vizinhança de t_0). Ou seja, construímos $W(t)$ a partir de soluções do problema homogéneo associado à mesma matriz $A(t)$.

Vejamos um exemplo. Considerem o sistema

$$\begin{cases} (1-t^2)\,y_1' = -t y_1 + y_2 + t\,(1-t^2), & y_1(0) = 0, \\ (1-t^2)\,y_2' = y_1 - t y_2 + (1-t^2), & y_2(0) = 1. \end{cases}$$

O sistema homogéneo associado é

$$\begin{cases} (1-t^2)\,w_1' = -t w_1 + w_2, \\ (1-t^2)\,w_2' = w_1 - t w_2, \end{cases}$$

e podemos verificar que $\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ são duas soluções linearmente independentes (desde que $1 - t^2 \neq 0$). Definimos então $W(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{bmatrix}$.

O sistema original pode ser reescrito (se aceitarmos uma divisão por $1 - t^2$) na forma

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{bmatrix} \frac{1}{1-t^2}\,\mathbf{y}(t) + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(3.27) *Exercício.* Qual a solução $\mathbf{y}(t)$? Qual o maior intervalo em que é solução da equação original? Qual o intervalo em que $W(t)$ é invertível?

(3.28) *Exercício.* Considerem a equação

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2t & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) + \begin{bmatrix} 3t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $(1, t^2 - 1)$ e $(1, t^2 + 1)$ são soluções do sistema homogéneo, determinem $\mathbf{y}(t)$.

(3.29) *Exercício.* Considerem o sistema

$$\begin{cases} z_1'(t) = t z_1(t) - z_2(t) + 1, \\ z_2'(t) = (1+t^2)\, z_1(t) - t z_2(t) + t, \end{cases} \qquad z_1(0) = z_2(0) = 0.$$

Sabendo que $(t, t^2 - 1)$ e $(1, t)$ são soluções do sistema homogéneo, determinem $\mathbf{z}(t)$.

(3.30) *Exercício.* Considerem o sistema

$$\begin{cases} w_1'(t) = 2w_1(t) - e^t\, w_2(t), \\ w_2'(t) = 2e^{-t}\, w_1(t) - 2w_2(t) + 1, \end{cases} \qquad w_1(0) = w_2(0) = 1.$$

Sabendo que $(e^t, 1)$ e $(1, 2e^{-t})$ são soluções do sistema homogéneo, determinem $\mathbf{w}(t)$.

(3.31) *Exercício**. Vamos considerar a equação geral $\mathbf{y}'(t) = A(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$ definida em $a < t < b$, onde cada $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ com componentes $a_{ij}(t)$. Vamos usar o teorema de Picard–Lindelöf, com a função $\mathbf{F} : t, \mathbf{x} \mapsto A(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$.

(a) Mostrem que $\mathbf{F}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{y}_2) = A(t)\,(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$.

(b) Suponham que cada função a_{ij} é limitada em $a < t < b$. Mostrem que existe $C > 0$ tal que, para $a < t < b$ e $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$, temos $\|\mathbf{F}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{y}_2)\| \le C\,\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|$.

(c) Se existir C como na alínea anterior, mostrem que existe uma única solução $\mathbf{y}$ satisfazendo a condição inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, onde $a < t_0 < b$.

(d) Mantendo as hipóteses das alíneas anteriores, mostrem que podemos escolher n condições iniciais linearmente independentes.

(3.32) *Exercício*. Seja agora a equação homogénea $\mathbf{w}'(t) = A(t)\,\mathbf{w}(t)$ em $a < t < b$, onde cada $A(t)$ é uma matriz $n \times n$, cujas componentes são limitadas em $a < t < b$ (como no exercício anterior). Consideramos ainda n soluções $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ dessa equação, bem como a matriz $W(t)$ com colunas $\mathbf{w}_1(t), \dots, \mathbf{w}_n(t)$.

(a) Fixado um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, mostrem que $t \mapsto W(t)\mathbf{v}$ é solução da equação homogénea.

(b) Se $W(t)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para *algum* $a < t < b$, mostrem que $W(t)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para *qualquer outro* $a < t < b$.

(c) Se $\{\mathbf{w}_1(t), \dots, \mathbf{w}_n(t)\}$ é linearmente independente para *algum* $a < t < b$, mostrem que o é para *qualquer outro* $a < t < b$.

(d) Mostrem como construir, a partir de n vetores linearmente independentes, soluções $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ de modo que a matriz $W(t)$ correspondente seja invertível para todo o $a < t < b$.

(3.33) Respostas de exercícios.

(3.5) $\left(\frac{13}{100} + \frac{t}{10} - \frac{13}{100}e^{-10t} + \frac{3t}{5}e^{-10t},\ \frac{7}{50} - \frac{t}{5} + \frac{43}{50}e^{-10t} - \frac{6t}{5}e^{-10t}\right)$.

(3.8) $\left(-\frac{1}{49} - \frac{t}{7} + \frac{1}{49}e^{7t}, \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{6t}\right)$.

(3.10) (a) $\begin{bmatrix} 2e^{8t}-e^{5t} & e^{8t}-e^{5t} \\ -2e^{8t}+2e^{5t} & -e^{8t}+2e^{5t} \end{bmatrix}$.
(b) $\begin{bmatrix} -3e^{7t}+4e^{5t} & -6e^{7t}+6e^{5t} \\ 2e^{7t}-2e^{5t} & 4e^{7t}-3e^{5t} \end{bmatrix}$.
(c) $\begin{bmatrix} -4e^{t}+5e^{-t} & 5e^{t}-5e^{-t} \\ -4e^{t}+4e^{-t} & 5e^{t}-4e^{-t} \end{bmatrix}$.
(d) $\begin{bmatrix} -4e^{-4t}+5e^{-5t} & 4e^{-4t}-4e^{-5t} \\ -5e^{-4t}+5e^{-5t} & 5e^{-4t}-4e^{-5t} \end{bmatrix}$.

(3.11) (a) $(0,0)$.
(b) $\left(-\frac{3}{49} - \frac{3}{7}t + \frac{3}{49}e^{7t}, \frac{2}{49} + \frac{2}{7}t - \frac{2}{49}e^{7t}\right)$.
(c) segunda coluna da exponencial.
(d) $\left(\frac{t}{5} - \frac{1}{25} + \frac{4}{e^{4t}} + \frac{26}{25e^{5t}}, \frac{t}{5} - \frac{1}{25} + \frac{5}{e^{4t}} + \frac{26}{25e^{5t}}\right)$.

(3.15) (a) $\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{3t}$.
(b) $\begin{bmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-t}$.

(3.16) (a) $\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{3t} + \frac{1}{3}te^{3t}, -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3t}\right)$.
(b) $(e^{5t}, te^{4t}, e^{4t})$.
(c) $(t - 1 + e^{-t}, e^{-t} + 2te^{-t}, 2e^{-t})$.

(3.24) (a) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1-6t & 9t \\ -4t & 1+6t \end{bmatrix} e^{-3t}$.
(b) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1+3t & t \\ -9t & 1-3t \end{bmatrix} e^{5t}$.
(c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2-e^{-t} & 2e^{-t}-2 & 2e^{-t}-2 \\ 2e^{-t}-2-t & 5+t-4e^{-t} & 4+t-4e^{-t} \\ 3+t-3e^{-t} & 6e^{-t}-6-t & 6e^{-t}-5-t \end{bmatrix}$.
(d) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$;
$\begin{bmatrix} (1+2t)e^{-3t} & e^{-3t}-e^{-2t} & (t-1)e^{-3t}+e^{-2t} \\ -4te^{-3t} & 3e^{-2t}-2e^{-3t} & (3-2t)e^{-3t}-3e^{-2t} \\ -4te^{-3t} & 2e^{-2t}-2e^{-3t} & (3-2t)e^{-3t}-2e^{-2t} \end{bmatrix}$.
(e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;
$\begin{bmatrix} (1+2t)e^{-2t} & e^{2t}-(1+2t)e^{-2t} & (1+t)e^{-2t}-e^{2t} \\ 4te^{-2t} & e^{2t}-4te^{-2t} & (1+2t)e^{-2t}-e^{2t} \\ 4te^{-2t} & -4te^{-2t} & (1+2t)e^{-2t} \end{bmatrix}$.
(f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1-t & t & -2t \\ -3t & 3+3t-2e^{2t} & 6e^{2t}-6-6t \\ -t & 1+t-e^{2t} & 3e^{2t}-2-2t \end{bmatrix}$.
(g) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1-2t & 2t & 2t \\ -3t & 1+3t & 3t \\ t & -t & 1-t \end{bmatrix} e^{3t}$.
(h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1-4t-2t^2 & 7t+3t^2 & -t-t^2 \\ -3t-t^2 & 1+5t+\frac{3}{2}t^2 & -t-\frac{1}{2}t^2 \\ t^2-t & t-\frac{3}{2}t^2 & 1-t+\frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} e^{2t}$.

(3.25) (a) $(7 + 3t, 5 + 2t)e^{-3t}$.
(b) $\left(te^{5t} - \frac{14}{5}e^{5t} - \frac{1}{5}, \frac{47}{5}e^{5t} - 3te^{5t} + \frac{3}{5}\right)$.
(c) $\left(1 - 3te^{2t} - t^2e^{2t}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2t} - 2te^{2t} - \frac{1}{2}t^2e^{2t}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}t^2e^{2t}\right)$.
(d) $\left(-1 - e^{2t} - te^{2t} - \frac{1}{2}t^2e^{2t}, -\frac{3}{8} - \frac{5}{8}e^{2t} - \frac{3}{4}te^{2t} - \frac{1}{4}t^2e^{2t}, \frac{3}{8} + \frac{5}{8}e^{2t} - \frac{1}{4}te^{2t} + \frac{1}{4}t^2e^{2t}\right)$.
(e) igual, mas com t substituído por $t - 2$.

(3.27) $\mathbf{y}(t) = (t + t^2, 1 + t)$. $\mathbb{R}$. $]-1, 1[$.

(3.28) $\mathbf{y}(t) = \left(1 + \frac{3}{2}t^2, -1 + t^2 + \frac{3}{4}t^4\right)$.

(3.29) $\mathbf{z}(t) = (t, t^2)$.

(3.30) $\mathbf{w}(t) = (-1 + 2e^t - te^t, 3 - t - 2e^{-t})$.

EPISÓDIO 4

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

As equações diferenciais de ordem superior podem ser resolvidas com as técnicas que discutimos no episódio 3. Por exemplo, $f'' - 13f' + 42f = 0$ (a variável independente continua a ser t) pode ser simulada usando $x_1 = f$ e $x_2 = f'$. O sistema fica então

$$\begin{cases} x_1' = f' = x_2, \\ x_2' = f'' = -42f + 13f' = -42x_1 + 13x_2, \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -42 & 13 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Esta é exatamente a equação discutida no início desse episódio. O polinómio característico da matriz A é $-\lambda(13-\lambda)+42$, ou $(\lambda-7)(\lambda-6)$. Quais os vetores próprios correspondentes? Digamos que $A\mathbf{v}_1 = 7\mathbf{v}_1$ e $A\mathbf{v}_2 = 6\mathbf{v}_2$. Assim,

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}}_{S} \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \cdot \mathbf{v}_1 & M \cdot \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\mathbf{v}_1 & 6\mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = S \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}}_{D},$$

e podemos concluir que

$$e^{At} = S \cdot e^{Dt} \cdot S^{-1} = S \cdot \begin{bmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{bmatrix} \cdot S^{-1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x}(t) = S \cdot \begin{bmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{bmatrix} \cdot S^{-1} \cdot \mathbf{x}(0).$$

Em particular, vemos que a primeira coordenada da solução (correspondente a $x_1 = f$) é uma combinação linear de e^{7t} e e^{6t}.

Isto encaixa num padrão mais geral: se usarmos D para indicar a derivação, podemos escrever $f''-13f'+42f = (D^2-13D+42)f$ e fatorizar $D^2-13D+42 = (D-7)(D-6)$. Por outro lado, podemos ver que $(D-7)$ *aniquila* e^{7t}, ou seja, que $(D-7)(e^{7t}) = (e^{7t})' - 7e^{7t} = 0$. Da mesma forma, $(D-6)$ aniquila e^{6t}. Vemos então que as funções aniquiladas por $D^2-13D+42$ (entre as quais está a solução f da nossa equação) são uma combinação linear das funções aniquiladas pelos seus fatores (que neste caso não têm raízes em comum). O *método dos aniquiladores* sistematiza esta estratégia, e será o nosso primeiro assunto neste episódio.

(4.1) *Exercício.* Escrevam a equação matricial correspondente a uma equação como

$$f''' + af'' + bf' + cf = 0.$$

Qual o polinómio característico da matriz que encontram? (Calculem o determinante usando a regra de Laplace em relação às primeiras colunas das matrizes.)

(4.2) Vamos olhar para a equação $f''+f'-2f=g$, com condições iniciais $f(0)=f'(0)=3$. Escrevendo-a na forma matricial, obtemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix}'}_{\mathbf{y}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}, \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Pela fórmula da variação das constantes, sabemos que

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\Big(\mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{-Ar}\,\mathbf{b}(r)\,\mathrm{d}r\Big) = \underbrace{e^{At}\,\mathbf{y}(0)}_{\substack{\text{solução da eq.}\\ \text{homogénea}}} + \underbrace{e^{At}\int_0^t e^{-Ar}\,\mathbf{b}(r)\,\mathrm{d}r}_{\text{solução particular}}.$$

(4.3) *Exercício.* Calculem a exponencial da matriz, e usem-na para resolver a equação no caso $g(t)=6e^t+2$.

(4.4) Só nos interessa a primeira linha. Vemos que, se não tivermos condições iniciais, temos de escolher um vetor constante em $\mathbb{R}^2$ (ou seja, a primeira linha envolve tantas constantes quanto a ordem da equação) e que há sempre uma solução particular.

Porém, também vemos que, já que as soluções envolvem exponenciais (que podem ser determinadas a partir dos valores próprios da matriz, ou mesmo diretamente a partir da equação—como?), seria desejável evitar a fórmula da variação das constantes.

(4.5) DERIVADAS E ANIQUILADORES. Começamos por identificar o núcleo de $(D-\lambda)$. Dizer $(D-\lambda)f=0$ é dizer $f'-\lambda f=0$. Esta equação não é exata, mas $e^{-\lambda t}$ é um fator integrante. Assim, podemos escrever

$$f'-\lambda f=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{-\lambda t}f'-e^{-\lambda t}\lambda f=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (e^{-\lambda t}f)'=0.$$

Ou seja, $e^{-\lambda t}f$ é uma constante C, ou $f=Ce^{\lambda t}$.

Imaginem agora que temos qualquer função f (aniquilada *ou não* por $(D-\lambda)$) e que queremos calcular $g=(D-\lambda)f=f'-\lambda f$. Usando o mesmo fator integrante $e^{-\lambda t}$ (no fim de contas, continuamos a ter uma equação linear), obtemos

$$e^{-\lambda t}g = e^{-\lambda t}f' - \lambda e^{-\lambda t}f = (e^{-\lambda t}f)' \qquad \Leftrightarrow \qquad g = e^{\lambda t}(e^{-\lambda t}f)'.$$

Concluímos assim que $(D-\lambda)f = e^{\lambda t}(e^{-\lambda t}f)'$.

(4.6) *Exercício.* Mostrem que $(D-\lambda)^k f = e^{\lambda t}(e^{-\lambda t}f)^{(k)}$ (para k inteiro positivo). Com base nesse resultado, mostrem que $(D-\lambda)^k f=0$ (i.e., f está no núcleo de $(D-\lambda)^k$, i.e., $(D-\lambda)^k$ aniquila f) precisamente se $e^{-\lambda t}f$ é um polinómio $P(t)$ de grau menor que k, ou seja, se $f(t)=P(t)\,e^{\lambda t}$.

(4.7) E o que acontece se o nosso operador tiver valores próprios distintos? Em geral, podemos escrever a equação original na forma $ABf=0$, onde A e B são operadores envolvendo apenas a derivada D (e portanto A e B comutam) e sem valores próprios em comum. Nesse

caso, todas as soluções de $ABf = 0$ são da forma $f = a + b$, onde $Aa = 0$ e $Bb = 0$ (isto não é óbvio; conseguem demonstrar?).

A ideia ficará mais clara com um exemplo. Imaginem que queremos encontrar as soluções de $(D+2)(D-1)^2 D f = 0$. Como os fatores $(D+2)$, $(D-1)^2$, e D não têm valores próprios comuns (os valores são, respetivamente, -2, 1, e 0), sabemos que f é uma combinação linear de elementos nos núcleos de $(D+2)$, $(D-1)^2$, e D. Ora, o núcleo de $(D+2)$ consiste nos múltiplos de e^{-2t}. O núcleo de $(D-1)^2$ consiste em polinómios de grau menor que 2 multiplicados por e^t. E o núcleo de D consiste nas constantes. Assim, vemos que f é da forma

$$f = \underbrace{C_1 e^{-2t}}_{\text{núcleo de } (D+2)} + \underbrace{C_2 e^t + C_3\, t\, e^t}_{\text{núcleo de } (D-1)^2} + \underbrace{C_4}_{\text{núcleo de } D} .$$

(4.8) Podemos querer o contrário: dada uma função, encontrar um operador que a aniquile (ou seja, encontrar uma *aniquilador*). Para tal, começamos por juntar as parcelas associadas ao mesmo valor próprio (ou seja, com a mesma exponencial), e determinar, para cada valor próprio, qual o grau necessário.

Por exemplo, quem é um aniquilador para $e^t - t^5 e^{5t} + 3t^2 e^t - t^3 e^{4t} + 10e^{5t} - 4t\, e^t$? Se juntarmos as parcelas associadas a cada valor próprio, podemos ler diretamente:

$$\underbrace{(1 + 3t^2 - 4t)\, e^t}_{\text{aniquilado por } (D-1)^3} + \underbrace{(-t^5 + 10)\, e^{5t}}_{\text{aniquilado por } (D-5)^6} + \underbrace{(-t^3)\, e^{4t}}_{\text{aniquilado por } (D-4)^4} .$$

Assim, $(D-1)^3 (D-5)^6 (D-4)^4$ (ou qualquer outro operador com os mesmos fatores) é um aniquilador para essa função.

Um ponto importante é que só podemos aplicar este método depois de termos simplificado cada parcela de modo a ter apenas uma exponencial e um polinómio. Por exemplo, se tivermos um produto de exponenciais, temos de simplificá-lo; se tivermos um produto de exponenciais e funções trigonométricas, temos de converter as funções trigonométricas para exponenciais complexas e simplificar.

(4.9) *Exercício.* Determinem o aniquilador mais simples de cada uma das seguintes funções:

(a) e^{4t}; (b) $3e^{4t}$; (c) e^{3t}; (d) $e^{3t} + 3e^{4t}$;

(e) e^{it}; (f) e^{-it}; (g) $\dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$; (h) $\cos t$;

(i) te^{3t+2it}; (j) te^{3t-2it}; (k) $te^{3t}\dfrac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i}$; (l) $te^{3t}\cos(2t)$;

(m) $te^{3t} - t^2 e^{3t}$; (n) $te^{3t} + t^2 e^{3t}\sin(2t)$; (o) $\sin(2t) + t^3\cos(2t)$; (p) $(\sin(2t))^2$.

(4.10) Vale a pena tomar nota deste padrão:

$$(D-a)^2 + b^2 = (D-a)^2 - (bi)^2 = (D-a-bi)(D-a+bi)$$

aniquila combinações lineares de $e^{(a+bi)\,t}$ e $e^{(a-bi)\,t}$, que coincidem (porquê?) com as combinações de $e^{at}\cos(bt)$ e $e^{at}\sin(bt)$.

Da mesma forma, $((D-a)^2+b^2)^k = (D-a-bi)^k(D-a+bi)^k$ aniquila produtos de polinómios de grau menor que k por essas exponenciais, ou seja (porquê?), aniquila combinações lineares de parcelas das formas $t^\ell e^{at}\cos(bt)$ e $t^\ell e^{at}\sin(bt)$ (onde $\ell < k$).

(4.11) *Exercício.* Indiquem três aniquiladores distintos para

$$e^{2t}+\sqrt{3}\,te^{2t}+(\cos t)^2+t^2\cos(2t)+e^t\,(\cos(2t)+t^2+t^3\sin(3t)).$$

(4.12) O MÉTODO DOS ANIQUILADORES. Vejamos então como usar o método dos aniquiladores para resolver a equação

$$f''+f'-2f=6e^t+2, \qquad f(0)=f'(0)=3.$$

Começamos por escrever a equação na forma

$$(D^2+D-2)f=6e^t+2 \qquad \Leftrightarrow \qquad (D+2)(D-1)f=6e^t+2.$$

Neste momento, sabemos resolver imediatamente a equação homogénea correspondente:

$$(D+2)(D-1)f=0.$$

As suas soluções são da forma $C_1\,e^{-2t}+C_2\,e^t$ (a solução geral da equação homogénea). Nitidamente, as equações homogéneas são mais fáceis de resolver.

A equação original é não homogénea, pois tem $6e^t+2$ no lado direito. Esta função é aniquilada por $(D-1)D$. Ao aplicarmos este operador a ambos os membros da equação original, obtemos

$$(D^2+D-2)f=6e^t+2 \qquad \Rightarrow \qquad (D-1)D\,(D^2+D-2)f=(D-1)D\,(6e^t+2)=0.$$

Notem que os polinómios em D comutam sempre entre si (conseguem demonstrar?). Por isso, a nova equação, depois de simplificada e fatorizada, fica

$$(D+2)(D-1)^2\,D\,f=0,$$

cujas soluções são, como vimos em (4.7),

$$f=\underbrace{C_1e^{-2t}+C_2\,e^t}_{\text{solução homogénea}}+\underbrace{C_3\,t\,e^t+C_4}_{\text{solução particular}}.$$

Mas notem que nem todos os valores de C_3 e C_4 são compatíveis com a equação original. Na verdade, qualquer outro lado direito (em vez de $6e^t+2$) que tenha o mesmo aniquilador dará origem a soluções desta forma.

Para determinar C_3 e C_4, substituímos $f^\star=C_3\,t\,e^t+C_4$ na equação original (não vale a pena incluirmos parcelas da solução homogénea, pois já sabemos que estão no núcleo de $(D+2)(D-1)$, ou seja, que depois de as substituir na equação original e simplificar, a sua contribuição é 0). Temos então

$$(f^\star)'=C_3\,e^t+C_3\,t\,e^t \qquad \text{e} \qquad (f^\star)''=C_3\,e^t+C_3\,e^t+C_3\,t\,e^t=2C_3\,e^t+C_3\,t\,e^t.$$

Substituindo na equação original $f'' + f' - 2f = 6e^t + 2$, obtemos

$$(2C_3\,e^t + C_3\,t\,e^t) + (C_3\,e^t + C_3\,t\,e^t) - 2(C_3\,t\,e^t + C_4) = 6e^t + 2,$$

ou simplesmente $3C_3\,e^t - 2C_4 = 6e^t + 2$. Como e^t e 1 são linearmente independentes, podemos concluir que os seus coeficientes não se misturam. Assim, obtemos $3C_3 = 6$ e $-2C_4 = 2$, ou $C_3 = 2$ e $C_4 = -1$. A solução geral (i.e., ignorando as condições iniciais) da equação original é então

$$f = C_1\,e^{-2t} + C_2\,e^t + 2te^t - 1.$$

Falta-nos apenas determinar C_1 e C_2, e para isso vamos usar as condições iniciais. Como

$$f' = -2C_1\,e^{-2t} + C_2\,e^t + 2e^t + 2te^t,$$

temos $f(0) = C_1 + C_2 - 1 = 3$ e $f'(0) = -2C_1 + C_2 + 2 = 3$. A solução desse sistema é $C_1 = 1$ e $C_2 = 3$, pelo que concluímos que

$$f = e^{-2t} + 3e^t + 2te^t - 1.$$

(4.13) Vejamos outro exemplo:

$$f'' - 2f' + 10f = -10, \qquad f(0) = 0, \qquad f'(0) = -2.$$

O operador no lado esquerdo é $D^2 - 2D + 10 = (D-1)^2 + 3^2$, e um aniquilador para a função do lado direito é D. Assim, vamos querer resolver

$$((D-1)^2 + 3^2)\,D\,f = 0.$$

Mas as soluções dessa equação são

$$f = \underbrace{C_1\,e^t\cos(3t) + C_2\,e^t\sin(3t)}_{\text{solução homogénea}} + \underbrace{C_3}_{f^\star}.$$

Como $(f^\star)' = (f^\star)'' = 0$, substituindo $f^\star$ na equação original obtemos $10C_3 = -10$, ou $C_3 = -1$. Logo, a solução geral da equação original é

$$f = C_1\,e^t\cos(3t) + C_2\,e^t\sin(3t) - 1$$

e a sua derivada é

$$f' = C_1\,e^t\cos(3t) - 3C_1\,e^t\sin(3t) + C_2\,e^t\sin(3t) + 3C_2\,e^t\cos(3t),$$

pelo que obtemos $f(0) = C_1 - 1 = 0$ e $f'(0) = C_1 + 3C_2 = -2$. Ou seja, $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, e

$$f = e^t\cos(3t) - e^t\sin(3t) - 1.$$

(4.14) *Exercício.* Determinem a solução geral de cada uma das seguintes equações:
(a) $f'' - 8f' + 15f = 0$;
(b) $f'' - 8f' + 16f = 0$;
(c) $f'' - 8f' + 17f = 0$;

(d) $f'' - 8f' + 20f = 0$;
(e) $f''' - 3f'' + 3f' - f = 0$.

(4.15) *Exercício.* Determinem a solução geral de cada uma das seguintes equações:
(a) $f'' - 8f' + 15f = 3e^{3t} + 8e^t$;
(b) $f'' - 8f' + 16f = 6e^{4t} - 8\sin t - \cos t$;
(c) $f'' - 8f' + 17f = -10te^t + 4e^{4t} - 11e^t$;
(d) $f'' - 8f' + 20f = 12e^t \cos t - 14e^t \sin t$;
(e) $f''' - 3f'' + 3f' - f = 6e^t$.

(4.16) *Exercício.* Determinem a solução de cada uma das seguintes equações:
(a) $f'' - 8f' + 15f = 2e^{5t}, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 4$;
(b) $f'' - 8f' + 16f = 2e^{5t}, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 4$;
(c) $f'' - 8f' + 17f = 2e^{5t}, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 4$;
(d) $f'' - 8f' + 17f = -3e^{4t}\cos(2t), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 4$;
(e) $f'' - 8f' + 20f = -3e^{4t}\cos(2t), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 4$;
(f) $f''' - 3f'' + 3f' - f = 6e^t, \quad f(0) = f''(0) = -1, \quad f'(0) = 1$.

(4.17) *Exercício.* Determinem a solução de cada uma das seguintes equações:
(a) $f'' - 2f = 4, \quad f(0) = f'(0) = 2$;
(b) $f''' + 8f = 12e^{-2t}, \quad f(0) = -2, \quad f'(0) = -1, \quad f''(0) = 0$.

(4.18) PARTE NÃO HOMOGÉNEA DEFINIDA POR TROCOS. Para resolver uma equação como

$$f'' - 2f' + 10f = g, \qquad f(0) = 0, \qquad f'(0) = -2,$$

onde g é uma função definida por troços, temos na verdade de resolver várias equações (uma para cada troço). Por exemplo, digamos que

$$g(t) = -10, \quad \text{se } t < \pi, \qquad \text{e} \qquad g(t) = 0, \quad \text{se } t > \pi.$$

Então a nossa solução terá a forma

$$f(t) = f_1(t), \quad \text{se } t < \pi, \qquad \text{e} \qquad f(t) = f_2(t), \quad \text{se } t > \pi,$$

onde f_1 é uma solução de

$$f'' - 2f' + 10f = -10, \qquad f(0) = 0, \qquad f'(0) = -2,$$

no troço $t < \pi$ e f_2 é uma solução de

$$f'' - 2f' + 10f = 0$$

no troço $t > \pi$. Uma vez que a função f tem de ser contínua e ter derivada contínua (de outra forma, f'' não existiria e a equação original (4.18) não faria sentido), temos

necessariamente $f_1(\pi) = f_2(\pi)$ e $f_1'(\pi) = f_2'(\pi)$, que nos dá as condições iniciais para o segundo troço.

O primeiro troço coincide com o exemplo (4.13), restrito a $t < \pi$. Já vimos (verifiquem!) que a solução geral de $f'' - 2f' + 10f = -10$ é $f(t) = C_1 e^t \cos(3t) + C_2 e^t \sin(3t) - 1$. Concretamente, no caso específico em que $f(0) = 0$ e $f'(0) = -2$, vimos que a solução é $f_1(t) = e^t \cos(3t) - e^t \sin(3t) - 1$. Calculando os valores em $t = \pi$, obtemos $f_1(\pi) = -e^\pi - 1$ e $f_1'(\pi) = 2e^\pi$, e por conseguinte $f_2(\pi) = -e^\pi - 1$ e $f_2'(\pi) = 2e^\pi$.

No mesmo exemplo também vimos que a solução geral de $f'' - 2f' + 10f = 0$ é dada por $f(t) = C_1 e^t \cos(3t) + C_2 e^t \sin(3t)$ (onde as constantes podem ou não ser as mesmas que na solução anterior). Usando as condições iniciais para f_2, vemos que $C_1 = 1 + e^{-\pi}$ e $C_2 = -1 - \frac{1}{3}e^{-\pi}$. (Verifiquem!)

Obtemos assim a solução final

$$f(t) = \begin{cases} e^t \cos(3t) - e^t \sin(3t) - 1, & \text{se } t < \pi, \\ (1 + e^{-\pi})\, e^t \cos(3t) - (1 + \frac{1}{3}e^{-\pi})\, e^t \sin(3t), & \text{se } t > \pi. \end{cases}$$

(4.19) *Exercício.* Considerem ainda

$$f'' - 2f' + 10f = g,$$

e continuem a aproveitar as conclusões do exemplo (4.13).

(a) Qual a solução f_1 para $g = 0$ e condições iniciais $f_1(0) = 0$ e $f_1'(0) = -2$? Mostrem que $f_1(\pi) = 0$ e $f_1'(\pi) = 2e^\pi$.

(b) Qual a solução f_2 para $g = -10$ e condições iniciais $f_2(\pi) = 0$ e $f_2'(\pi) = 2e^\pi$?

(c) Qual a solução f quando

$$g(t) = 0, \quad \text{se } t < \pi, \qquad \text{e} \qquad g(t) = -10, \quad \text{se } t > \pi$$

e as condições iniciais são $f(0) = 0$ e $f'(0) = -2$?

(4.20) *Exercício.* Considerem agora

$$f'' - 8f' + 15f = g, \qquad f(0) = 1, \qquad f'(0) = 4.$$

Determinem a sua solução em cada um destes casos:

(a) $g(t) = \begin{cases} 2e^{5t}, & \text{se } t < 1, \\ 0, & \text{se } t > 1; \end{cases}$ (b) $g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 1, \\ 2e^{5t}, & \text{se } t > 1. \end{cases}$

(4.21) COEFICIENTES NÃO CONSTANTES. Como em (3.26), também aqui é razoável perguntar o que se passa quando a equação não tem coeficientes constantes. Olhemos de novo para a (1.2), reescrita ligeiramente:

$$f'' - \frac{2}{2x+1} f' = 1 - 4x^2.$$

Na forma matricial, e chamando $\mathbf{y}$ ao vetor, ficamos com

$$\mathbf{y}'(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{2x+1} \end{bmatrix}}_{A(x)} \mathbf{y}(x) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1-4x^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}(x)}.$$

Pela fórmula da variação das constantes (vamos considerar $t_0 = 0$), sabemos que

$$\mathbf{y}(x) = W(x)\left(W(0)^{-1}\,\mathbf{y}(0) + \int_0^x W(r)^{-1}\,\mathbf{b}(r)\,\mathrm{d}r\right),$$

onde as colunas de $W(t)$ são soluções do problema homogéneo $\mathbf{w}'(x) = A(x)\,\mathbf{w}(x)$, ou seja, são obtidas a partir de soluções de $f'' - \frac{2}{2x+1}f' = 0$.

(4.22) *Exercício.* Mostrem que $f_1(x) = 1$ e $f_2(x) = x^2 + x$ são soluções da equação homogénea. Qual a matriz $W(x)$ correspondente? Calculem

$$\begin{bmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{bmatrix} = W(0)^{-1}\,\mathbf{y}(0) + \int_0^x W(r)^{-1}\,\mathbf{b}(r)\,\mathrm{d}r$$

e usem o resultado para mostrar que as soluções da equação original (não homogénea) são da forma $f(x) = C_1(x)\,f_1(x) + C_2(x)\,f_2(x)$. (Daí ser a fórmula da variação das constantes.)

(4.23) *Exercício.* Considerem agora a equação

$$x^2 f'' - x f' + f = 3x, \qquad f(1) = f'(1) = 0.$$

Sabendo que $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = x\log x$ são soluções da equação homogénea, qual a matriz $W(x)$ correspondente? Qual a solução da equação? O que mudava se mudássemos as condições iniciais?

(4.24) *Exercício.* Resolvam

$$(\cos x)\,f'' + (\sin x)\,f' = (\cos x)^3, \qquad f(0) = 1, \qquad f'(0) = 4,$$

sabendo que $f_1(x) = 1$ e $f_2(x) = \sin x$ são soluções da equação homogénea. (De que outras formas conseguem resolver esta equação?)

(4.25) *Exercício.* Resolvam

$$f''' - \frac{3}{x}f'' + \frac{6}{x^2}f' - \frac{6}{x^3}f = 6x, \qquad f(1) = -5, \qquad f'(1) = -8, \qquad f''(1) = 0,$$

sabendo que $f_1(x) = x/2$, $f_2(x) = x^2$, e $f_3(x) = x^3/2$ são soluções da equação homogénea.

(4.26) Respostas de exercícios.

(4.1) $\begin{bmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{bmatrix}$.
$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$.

(4.3) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^t+\frac{1}{3}e^{-2t} & \frac{1}{3}e^t-\frac{1}{3}e^{-2t} \\ \frac{2}{3}e^t-\frac{2}{3}e^{-2t} & \frac{1}{3}e^t+\frac{2}{3}e^{-2t} \end{bmatrix}$; a equação é a mesma discutida em (4.12).

(4.9) (a) $D-4$. (b) $D-4$. (c) $D-3$.
(d) $(D-4)(D-3)$. (e) $D-i$. (f) $D+i$.
(g) $(D-i)(D+i)$. (h) $(D-i)(D+i)$.
(i) $(D-3-2i)^2$. (j) $(D-3+2i)^2$.
(k) $(D-3-2i)^2(D-3+2i)^2$.
(l) $(D-3-2i)^2(D-3+2i)^2$. (m) $(D-3)^3$.
(n) $(D-3)^2(D-3-2i)^3(D-3+2i)^3$.
(o) $(D-2i)^4(D+2i)^4$. (p) $D(D-4i)(D+4i)$.

(4.11) qualquer múltiplo de $(D-2)^2 D (D^2 + 2^2)^3 (D-1)^3 ((D-1)^2+2^2)((D-1)^2+3^2)^4$.

(4.14) (a) $C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t}$. (b) $C_1 e^{4t} + C_2 te^{4t}$.
(c) $C_1 e^{4t}\cos t + C_2 e^{4t}\sin t$.
(d) $C_1 e^{4t}\cos(2t) + C_2 e^{4t}\sin(2t)$.
(e) $C_1 e^t + C_2 te^t + C_3 t^2 e^t$.

(4.15) (a) $C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t} - \frac{3}{2}te^{3t} + e^t$.
(b) $C_1 e^{4t} + C_2 te^{4t} + 3t^2 e^{4t} - \frac{112}{289}\sin t - \frac{79}{289}\cos t$.
(c) $C_1 e^{4t}\cos t + C_2 e^{4t}\sin t - te^t - \frac{17}{10}e^t + 4e^{4t}$.
(d) $C_1 e^{4t}\cos(2t) + C_2 e^{4t}\sin(2t) + \frac{e^t}{3}\cos t - \frac{4e^t}{3}\sin t$.
(e) $C_1 e^t + C_2 te^t + C_3 t^2 e^t + t^3 e^t$.

(4.16) (a) $te^{5t} + e^{3t}$. (b) $2e^{5t} - e^{4t} - 2te^{4t}$.
(c) $e^{5t} - e^{4t}\sin t$. (d) $e^{4t}\cos(2t)$.
(e) $e^{4t}\cos(2t) - \frac{3}{4}te^{4t}\sin(2t)$.
(f) $t^3 e^t - 2t^2 e^t + 2te^t - e^t$.

(4.17) (a) $-2 + \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{\sqrt{2}\,t} + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{-\sqrt{2}\,t}$.
(b) $te^{-2t} - 2e^t\cos(\sqrt{3}\,t)$.

(4.19) (a) $-\frac{2}{3}e^t\sin(3t)$.
(b)
$-e^{t-\pi}\cos(3t) + \frac{1}{3}e^{t-\pi}\sin(3t) - \frac{2}{3}e^t\sin(3t) - 1$.
(c) $\begin{cases} -\frac{2}{3}e^t\sin(3t), & \text{se } t < \pi, \\ -e^{t-\pi}\cos(3t)+\frac{1}{3}e^{t-\pi}\sin(3t)-\frac{2}{3}e^t\sin(3t)-1, & \text{se } \pi < t. \end{cases}$

(4.20) (a) $f(t) = \begin{cases} te^{5t}+e^{3t}, & \text{se } t < 1, \\ \frac{3}{2}e^{5t}+(1-\frac{1}{2}e^2)e^{3t}, & \text{se } t > 1. \end{cases}$
(b) $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{5t}+\frac{1}{2}e^{3t}, & \text{se } t < 1, \\ -e^{5t}+te^{5t}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^2)e^{3t}, & \text{se } t > 1. \end{cases}$

(4.22) $W(x) = \begin{bmatrix} 1 & x^2+x \\ 0 & 2x+1 \end{bmatrix}$;
$C_1(x) = f(0) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4$;
$C_2(x) = f'(0) + x - x^2$.

(4.23) $W(x) = \begin{bmatrix} x & x\log x \\ 1 & \log x + 1 \end{bmatrix}$; $f(x) = \frac{3}{2}x(\log x)^2$.

(4.24) $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x)^2 + 1 + 4\sin x$.

(4.25) $f(x) = x^4 - 6x^2$, em $x > 0$.

EPISÓDIO 5

TRANSFORMADA DE LAPLACE

O nosso tópico neste episódio é a transformada de Laplace. O seu principal efeito é transformar derivadas em produtos por variáveis. Ou seja, transformar equações diferenciais em equações algébricas. Por exemplo, $f'' - 13f' + 42f = 0$ transforma-se em

$$(s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)) - 13(s F(s) - f(0)) + 42F(s) = 0$$

(é tradicional chamar $F(s)$ à transformada de $f(t)$). Daqui é fácil obter $F(s)$, o que significa que, se tivermos uma forma prática de inverter a transformada de Laplace, temos um método alternativo de resolução de equações.

(5.1) Funções definidas por troços. Como vamos lidar com funções definidas por troços, começamos por introduzir as *funções de Heaviside*. Definimos

$$H_a : t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } t > a, \\ 0, & \text{se } t < a. \end{cases}$$

(Notem que não especificamos $H_a(a)$, porque não tem qualquer papel no que vamos fazer.) Esta função permite-nos "cortar" o gráfico de uma função f e ficar apenas com a parte do gráfico à direita de a, pois

$$(H_a f)(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } t > a, \\ 0, & \text{se } t < a. \end{cases}$$

(Mais uma vez, não especificamos o valor da função na fronteira entre troços.)

A mesma notação pode ser generalizada para descrever funções com mais troços, pois se $a < b$ então

$$(H_a - H_b)(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } a < t < b, \\ 0, & \text{se } t < a \text{ ou } b < t \end{cases}$$

(verifiquem). Isto permite-nos escrever a função

$$g : t \mapsto \begin{cases} e^t, & \text{se } t < -1, \\ \cos t + 1, & \text{se } -1 < t < 2, \\ e^{3t}, & \text{se } 2 < t < 3, \\ e^{3t} + e^{5t}, & \text{se } 3 < t \end{cases}$$

como

$$\begin{aligned} e^t(1 - H_{-1}) + (\cos t + 1)(H_{-1} - H_2) + e^{3t}(H_2 - H_3) + (e^{3t} + e^{5t})H_3 \\ = e^t(1 - H_{-1}) + (\cos t + 1)(H_{-1} - H_2) + e^{3t} H_2 + e^{5t} H_3. \end{aligned}$$

Reparem que $(1-H_{-1})$ corresponde a manter o gráfico da função desde $-\infty$ até -1. Reparem também que na segunda versão e^{3t} se mantém de 2 em diante (tanto no troço $2<t<3$ como no troço $3<t$) e que e^{5t} se mantém de 3 em diante.

Da mesma forma, podemos reconstituir uma função por troços a partir da expressão com funções de Heaviside. Por exemplo, se

$$h(t)=e^{3t}H_2(t)+e^{4t}H_5(t)+(e^{5t}-e^{3t})H_6(t),$$

vemos que os pontos que separam os diferentes troços são 2, 5, e 6. A primeira parcela só é tida em conta à direita de 2, a segunda parcela só é tida em conta à direita de 5, e a terceira parcela só é tida em conta à direita de 6. Ficamos então com

$$h(t)=\begin{cases}0, & \text{se } t<2,\\ e^{3t}, & \text{se } 2<t<5,\\ e^{3t}+e^{4t}, & \text{se } 5<t<6,\\ e^{3t}+e^{4t}+(e^{5t}-e^{3t}), & \text{se } 6<t.\end{cases}$$

(5.2) *Exercício.* Usem funções de Heaviside para escrever estas funções:

(a) $\begin{cases}e^t, & \text{se } t<1,\\ e^t+e^{2t}, & \text{se } 1<t;\end{cases}$ (b) $\begin{cases}e^t, & \text{se } t<1,\\ e^{2t}, & \text{se } 1<t;\end{cases}$ (c) $\begin{cases}e^{3t}, & \text{se } -2<t<1,\\ e^{2t}, & \text{se } 1<t;\end{cases}$

(d) $\begin{cases}t^2, & \text{se } 0<t<3,\\ \cos t, & \text{se } 3<t<5,\\ \sin t, & \text{se } 5<t;\end{cases}$ (e) $\begin{cases}t^2, & \text{se } 0<t<1,\\ e^t, & \text{se } 1<t<e,\\ t^e, & \text{se } e<t;\end{cases}$ (f) $\begin{cases}t-t^2, & \text{se } 1<t<2,\\ t^2+e^t, & \text{se } 2<t<4,\\ 1-e^t, & \text{se } 4<t<6.\end{cases}$

(5.3) *Exercício.* Escrevam estas funções na forma tradicional (descrição por troços):

(a) $H_\pi+H_2-3H_5$;
(b) $H_\pi+H_2-3H_5+5H_1$;
(c) $H_\pi+H_2-3H_5+5H_1-2$;
(d) $H_3(t)e^t+H_2(t)e^{2t}-H_1(t)e^t$;
(e) $H_0(t)+\cos(3t)H_{-1}(t)$;
(f) $H_0(t)+\cos(3t)H_{-1}(t)+e^t$.

(5.4) *Exercício.* Calculem estes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^4 H_2(t)\,dt$;
(b) $\displaystyle\int_0^4 H_2(t)\,t\,dt$;
(c) $\displaystyle\int_0^4 H_{-2}(t)\,dt$;
(d) $\displaystyle\int_0^4 H_{-2}(t)+H_2(t)\,t+H_5(t)\,dt$.

(5.5) A TRANSFORMADA DE LAPLACE. Vamos considerar apenas funções f cujo primeiro troço é nulo (ou seja, todas as parcelas envolvem uma função de Heaviside) e satisfazendo uma condição do género $|f(t)|\leq Ce^{at}$ (onde $a,C\in\mathbb{R}$ são fixos para cada função, mas podem ser

diferentes para funções diferentes). Definimos a *transformada de Laplace* de uma tal função por

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

onde s é uma variável complexa. Frequentemente vamos usar a abreviatura

$$\mathscr{L}_c\{f\}(s) = \mathscr{L}\{H_c f\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} H_c(t) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{c}^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Mas notem que esta abreviatura não é de modo nenhum "oficial". Vamos usá-la só porque simplifica as coisas, mas não contem encontrá-la com o mesmo significado noutros sítios. O mais habitual é usar apenas funções f definidas em $]0,+\infty[$, e portanto a transformada de Laplace que encontram habitualmente é aquilo a que estamos a chamar $\mathscr{L}_0\{f\}$. Vamos também usar essa convenção: se falarmos em "transformada de Laplace de f" sem indicar um valor de c e se f não envolver funções de Heaviside (ou seja, se não houver nenhum valor de c implícito), então vamos assumir que se trata de $c = 0$.

Se fizermos a mudança de variável (qual?), podemos observar que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_c\{f(t)\}(s) &= \int_{c}^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} e^{-s(t+c)} f(t+c)\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-cs} \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t+c)\,\mathrm{d}t = e^{-cs}\,\mathscr{L}_0\{f(t+c)\}(s),\end{aligned}$$

ou, alternativamente,

$$\mathscr{L}_c\{f(t-c)\}(s) = e^{-cs}\,\mathscr{L}_0\{f(t)\}(s)$$

(conseguem traduzir de uma versão para a outra?).

(5.6) Começamos por calcular

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0\{e^{at}\} &= \int_{0}^{\infty} e^{-st+at}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{T} e^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right]_{t=0}^{T} = -\lim_{T\to\infty} \frac{e^{-(s-a)T}}{s-a} + \frac{1}{s-a} = \frac{1}{s-a}.\end{aligned}$$

Notem que a primitiva (feita no início da segunda linha) só é válida se $s \neq a$ e que o limite final só existe se $\operatorname{Re} s > a$. (Conseguem verificar que o integral original, mesmo com a primitiva correta, também não converge se $s \neq a$?) Temos também

$$\mathscr{L}_c\{e^{at}\} = e^{-cs}\,\mathscr{L}_0\{e^{a(t+c)}\} = e^{-cs}\,e^{ac}\,\mathscr{L}_0\{e^{at}\} = \frac{e^{-(s-a)c}}{s-a}.$$

Algo semelhante se passa com funções f satisfazendo $|f(t)| \leq Ce^{at}$ (ou seja, funções f dominadas por alguma exponencial). Usando $s_0 = \operatorname{Re} s$:

$$\begin{aligned}\bigl|\mathscr{L}_c\{f(t)\}\bigr| &= \left| \int_{c}^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{c}^{\infty} e^{-s_0 t}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq C \int_{c}^{\infty} e^{-s_0 t}\,e^{at}\,\mathrm{d}t = C\,\mathscr{L}_c\{e^{at}\}(s_0) = C\,\frac{e^{-(s_0-a)c}}{s_0-a},\end{aligned}$$

o que mostra que o integral impróprio definindo $\mathscr{L}_a\{f\}$ está bem definido pelo menos no semiplano direito $\operatorname{Re} s > a$. (Veem porquê?)

Embora o integral só esteja bem definido num semiplano direito, para as funções f que vamos considerar, a função $\mathscr{L}_a\{f\}$ pode ser estendida a todo o plano complexo (exceto num número finito de polos); todos os polos ficam fora desse semiplano direito.

(5.7) *Exercício.* Determinem as transformadas de Laplace das seguintes funções:

(a) e^{5t}; (b) $3e^{5t}$; (c) $H_2(t)e^{5t}$; (d) e^{2it};

(e) $10e^{4t}+e^{5t}$; (f) $3e^{4t}-e^{6t}$; (g) $H_0(t)e^{4t}-H_2(t)e^{5t}$; (h) $\begin{cases} e^{4t}, \text{se } 0<t<2, \\ e^{5t}, \text{se } 2<t. \end{cases}$

Recordem a convenção que estamos a usar: se não houver indicação em contrário, assumimos que as funções são não-nulas apenas em $]0,+\infty[$ (e neste caso, $\mathscr{L}\{f\} = \mathscr{L}_0\{f\}$).

(5.8) *Exercício.* Quais as funções com estas transformadas de Laplace?

(a) $\dfrac{1}{s-3}$; (b) $\dfrac{20}{s-3}$; (c) $\dfrac{20}{s-3}-\dfrac{4}{s-5}$; (d) $\dfrac{e^{-2s}}{s}$;

(e) $\dfrac{e^{-2(s-1)}}{s-1}$; (f) $\dfrac{e^{-2s}}{s-1}+\dfrac{e^2}{s}$; (g) $\dfrac{3}{(s-1)(s+2)}$; (h) $\dfrac{e^{-s}+1}{s^2-1}$.

(5.9) Conhecendo a transformada de Laplace da exponencial, podemos facilmente obter a transformada de Laplace dos senos e cossenos, usando

$$\mathscr{L}_0\{e^{at}\,e^{ibt}\} = \mathscr{L}_0\{e^{(a+bi)t}\} = \frac{1}{s-a-bi}.$$

Ficamos então com

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_0\{e^{at}\cos(bt)\} &= \mathscr{L}_0\left\{e^{at}\,\frac{e^{ibt}+e^{-ibt}}{2}\right\} = \tfrac{1}{2}\mathscr{L}_0\{e^{(a+bi)t}\} + \tfrac{1}{2}\mathscr{L}_0\{e^{(a-bi)t}\} \\
&= \frac{1}{2(s-a-bi)} + \frac{1}{2(s-a+bi)} = \frac{s-a+bi+s-a-bi}{2(s-a-bi)(s-a+bi)} \\
&= \frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_0\{e^{at}\sin(bt)\} &= \mathscr{L}_0\left\{e^{at}\,\frac{e^{ibt}-e^{-ibt}}{2i}\right\} = \tfrac{1}{2i}\mathscr{L}_0\{e^{(a+bi)t}\} - \tfrac{1}{2i}\mathscr{L}_0\{e^{(a-bi)t}\} \\
&= \frac{1}{2i(s-a-bi)} - \frac{1}{2i(s-a+bi)} = \frac{(s-a+bi)-(s-a-bi)}{2i(s-a-bi)(s-a+bi)} \\
&= \frac{b}{(s-a)^2+b^2}.
\end{aligned}$$

(Podemos usar o método do final de (5.5) para calcular $\mathscr{L}_c\{e^{at}\cos(bt)\}$ e $\mathscr{L}_c\{e^{at}\sin(bt)\}$. Mas como podem constatar rapidamente, o resultado não é nada de especial. . .)

(5.10) *Exercício.* Quais as transformadas de Laplace destas funções? Recordem que se não houver indicação em contrário, assumimos que as funções são não-nulas apenas em $]0,+\infty[$ (e neste caso, $\mathscr{L}\{f\} = \mathscr{L}_0\{f\}$).

(a) $e^{3t}\sin(5t)$; (b) $e^{3t}(\cos(5t))^2$; (c) $H_\pi(t)\,e^{3t}\sin(5t)$; (d) $H_\pi(t)\,e^{3t}(\sin(5t))^2$.

(5.11) *Exercício.* Quais as transformadas de Laplace das funções do exercício (5.3)?

(5.12) *Exercício.* Quais as funções cujas transformadas são as seguintes? Usem funções de Heaviside ou descrevam os troços individualmente. (Pode ser útil rever o final de (5.5).)

(a) $\dfrac{s-3}{s^2-6s+25}$; (b) $\dfrac{3}{s^2-6s+25}$; (c) $\dfrac{s}{s^2-6s+25}$;

(d) $\dfrac{s-4}{s^2-6s+25}$; (e) $\dfrac{1}{s^2-2s+2}$; (f) $\dfrac{(s^2-2s+2)-s}{s\,(s^2-2s+2)}$;

(g) $\dfrac{3}{(s^2-2s+2)(s^2-2s+5)}$; (h) $\dfrac{1}{s^2-2s+2}+\dfrac{e^{2s}}{s}$; (i) $\dfrac{e^{2s}}{s^2-2s+2}$.

(5.13) Continuamos a nossa exploração das propriedades da transformada de Laplace, com

$$\mathscr{L}_c\{f'(t)\}(s) = \int_c^\infty e^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\int_c^T e^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\int_c^T e^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[e^{-st} f(t)\Big]_{t=c}^T + \int_c^T s e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

o que nos leva (como?) a

$$\mathscr{L}_c\{f'(t)\}(s) = -e^{-cs} f(c) + s\,\mathscr{L}_c\{f\}(s).$$

Já agora, é razoável perguntar qual a derivada (em ordem a s) de $\mathscr{L}_a\{f\}(s)$. Assumindo que podemos derivar a função integranda em ordem a s, ficamos com

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathscr{L}_c\{f\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_c^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^\infty \frac{\partial e^{-st}}{\partial s} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^\infty -te^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = -\mathscr{L}_c\{t\,f(t)\}.$$

Porém, é preciso algum cuidado: não só estamos a assumir que podemos trocar a derivada em ordem a s com o integral em ordem a t, mas o integral em ordem a t é um integral impróprio, pelo que estamos na verdade a trocar a derivada do limite de um integral pelo limite de um integral da derivada.

Prossigamos então com mais cuidado. Temos (verifiquem que os passos são seguros)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathscr{L}_c\{f\}(s) &= \lim_{h\to0}\frac{\mathscr{L}_c\{f\}(s+h)-\mathscr{L}_c\{f\}(s)}{h} = \lim_{h\to0}\lim_{T\to\infty}\frac{\int_c^T e^{-(s+h)t} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^T e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\lim_{T\to\infty}\int_c^T \frac{e^{-(s+h)t}-e^{-st}}{h} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to0}\lim_{T\to\infty}\int_c^T \frac{e^{-ht}-1}{h} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Para podermos continuar, precisávamos que o limite com $h \to 0$ estivesse dentro do integral. Mas como

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{-ht}-1}{h} = -t$$

(trata-se da derivada de e^{-ht} em ordem a h), sabemos que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|h| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{e^{-ht}-1}{h} + t \right| < \varepsilon.$$

Recordem agora que estamos a assumir que $|f(t)| \le Ce^{at}$ para constantes $a, C \in \mathbb{R}$. Então, para $|h| < \delta$, temos

$$\begin{aligned}
&\left| \lim_{T\to\infty} \int_c^T \frac{e^{-ht}-1}{h} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t - \lim_{T\to\infty} \int_c^T (-t)\, e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\quad = \left| \lim_{T\to\infty} \int_c^T \left(\frac{e^{-ht}-1}{h} + t \right) e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \le \lim_{T\to\infty} \int_c^T \left| \frac{e^{-ht}-1}{h} + t \right| e^{-st}\, |f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\quad \le C\varepsilon \lim_{T\to\infty} \int_c^T e^{-st}\, e^{at}\,\mathrm{d}t = C\varepsilon\, \mathscr{L}_c\{e^{at}\} = C\varepsilon \frac{e^{-(s-a)c}}{s-a}.
\end{aligned}$$

Daqui concluímos (porquê?) que

$$\lim_{h\to 0} \lim_{T\to\infty} \int_c^T \left(\frac{e^{-ht}-1}{h} + t \right) e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

o que nos leva (como?) a

$$\lim_{h\to 0} \lim_{T\to\infty} \int_c^T \frac{e^{-ht}-1}{h} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \int_c^T -t\, e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

que é o que precisávamos para continuar o nosso cálculo. Voltando a ele:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \mathscr{L}_c\{f\}(s) &= \lim_{h\to 0} \lim_{T\to\infty} \int_c^T \frac{e^{-ht}-1}{h} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_c^T -t\, e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = -\mathscr{L}_c\{t\, f(t)\}(s).
\end{aligned}$$

(5.14) *Exercício.* Usem este resultado para calcular $\mathscr{L}_c\{t^k\, e^{at}\}$.

(5.15) Resumindo tudo o que dissemos:

$$\mathscr{L}_c\{f(t-c)\} = e^{-cs}\, \mathscr{L}_0\{f(t)\}, \qquad \mathscr{L}_c\{f'\} = s\, \mathscr{L}_c\{f\} - e^{-cs} f(c),$$

$$\mathscr{L}_c\{t\, f(t)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \mathscr{L}_c\{f\}(s), \qquad \mathscr{L}_0\{t^k\, e^{at}\} = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}},$$

$$\mathscr{L}_0\{e^{at} \cos(bt)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \qquad \mathscr{L}_0\{e^{at} \sin(bt)\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}.$$

(5.16) *Exercício.* Quais as transformadas de Laplace das funções do exercício (4.9)?

(5.17) *Exercício.* Qual a transformada inversa de cada uma destas funções?

(a) $\dfrac{s}{s^2+1}$; (b) $\dfrac{s}{s^2-1}$; (c) $\dfrac{-2s}{(s^2-1)^2}$;

(d) $\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$; (e) $\dfrac{s-1}{(s^2-2s+10)^2}$; (f) $\dfrac{1}{(s-1)^6}$;

(g) $\dfrac{s-1}{(s-1)^6}$; (h) $\dfrac{s}{(s-1)^6}$; (i) $\dfrac{e^{3s}}{(s-1)^6}$.

(5.18) Resolução de EDOs usando transformada de Laplace. Mas o que tem a transformada de Laplace a ver com equações diferenciais? Por exemplo, conseguimos resolver a equação

$$f' = 3f, \qquad f(0) = 12$$

usando a transformada de Laplace? Sim.

É tradicional usar maiúsculas, como F, para a transformada de Laplace de funções em minúsculas, como f. Ou seja, é comum escrever $F(s) = \mathscr{L}_0\{f(t)\}(s)$ (e aqui vamos sempre usar a transformada com $c = 0$). Aplicando a transformada a ambos os membros da equação diferencial, ficamos com

$$\mathscr{L}\{f'\} = \mathscr{L}\{3f\}.$$

Mas

$$\mathscr{L}\{f'\} = s\,\mathscr{L}\{f\} - f(0) = s\,F(s) - 12 \qquad \text{e} \qquad \mathscr{L}\{3f\} = 3\mathscr{L}\{f\} = 3F(s),$$

o que nos leva à equação

$$s\,F(s) - 12 = 3F(s).$$

Reparem que esta equação já não envolve derivadas: transformámos uma equação diferencial numa equação algébrica. De facto, é fácil resolvê-la:

$$s\,F(s) - 3F(s) = 12 \qquad \Leftrightarrow \qquad F(s) = \frac{12}{s-3}.$$

Nem sequer precisamos de nos preocupar com o caso $s = 3$: estamos já no mundo das funções meromorfas, e estamos apenas a constatar que F tem um polo em $s = 3$.

Temos assim

$$\mathscr{L}_0\{f\} = \mathscr{L}\{H_0 f\} = \frac{12}{s-3}.$$

Assumindo que a transformada de Laplace é injetiva, concluímos que

$$H_0(t)\,f(t) = 12H_0(t)\,e^{3t}, \qquad \text{ou} \qquad f(t) = 12e^{3t}.$$

Este raciocínio é potencialmente subtil. A solução f que procuramos é uma função contínua com derivada contínua (porquê?). Mas a transformada de Laplace só opera sobre funções com o primeiro troço nulo. Mais: como temos a condição inicial em $t = 0$, e como

$\mathscr{L}_c\{f'\} = \mathscr{L}\{H_c f'\}$ envolve $f(c)$, convém-nos cortar a função em $t = 0$. Assim, o que realmente usamos é $\mathscr{L}_0\{f\} = \mathscr{L}\{H_0 f\}$ e $\mathscr{L}_0\{f'\} = \mathscr{L}\{H_0 f'\}$. Assim, no final quem obtemos (invertendo a transformada de Laplace) é $H_0 f$.

(5.19) *Exercício.* Resolvam estas equações diferenciais:
(a) $f' - 3f = 2e^t, \quad f(0) = 0;$
(b) $f' - 3f = 2e^t, \quad f(0) = 1;$
(c) $f' - 3f = e^{3t}, \quad f(0) = 2;$
(d) $f' - 3f = -3, \quad f(0) = 3;$
(e) $f' - 3f = e^{3t} - 2e^t, \quad f(0) = 4.$

(5.20) Vejamos outro exemplo. Vamos resolver outra vez a equação (4.12)

$$f'' + f' - 2f = 6e^t + 2, \qquad f(0) = f'(0) = 3.$$

Temos

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f'\} &= s\,F(s) - f(0) = s\,F(s) - 3, \\ \mathscr{L}\{f''\} &= s\,\mathscr{L}\{f'\} - f'(0) = s\,(s\,F(s) - 3) - 3 = s^2\,F(s) - 3s - 3, \end{aligned}$$

portanto a equação original passa a

$$\underbrace{(s^2\,F(s) - 3s - 3)}_{\mathscr{L}\{f''\}} + \underbrace{(s\,F(s) - 3)}_{\mathscr{L}\{f'\}} - 2\underbrace{F(s)}_{\mathscr{L}\{f\}} = \underbrace{\frac{6}{s-1}}_{\mathscr{L}\{6e^t\}} + \underbrace{\frac{2}{s}}_{\mathscr{L}\{2\}},$$

ou, depois de simplificar,

$$(s^2 + s - 2s)\,F(s) = 3s + 6 + \frac{6}{s-1} + \frac{2}{s}.$$

Resolvendo em ordem a $F(s)$ e fatorizando o denominador, chegamos a

$$F(s) = \frac{3(s+2) + \frac{6}{s-1} + \frac{2}{s}}{(s+2)(s-1)} = \frac{3}{s-1} + \frac{6}{(s-1)^2\,(s+2)} + \frac{2}{s\,(s+2)\,(s-1)}.$$

Para continuar, precisamos de decompor as duas últimas frações em frações parciais. Temos

$$\begin{aligned} \frac{6}{(s-1)^2\,(s+2)} + \frac{2}{s\,(s+2)\,(s-1)} &= \frac{2(s+2) - 2(s-1)}{(s-1)^2\,(s+2)} + \frac{2s - 2(s-1)}{s\,(s+2)\,(s-1)} \\ &= \frac{2}{(s-1)^2} - \frac{2}{(s-1)\,(s+2)} + \frac{2}{(s-1)\,(s+2)} - \frac{2}{s\,(s+2)} \\ &= \frac{2}{(s-1)^2} - \frac{(s+2) - s}{s\,(s+2)} = \frac{2}{(s-1)^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}. \end{aligned}$$

Assim, chegamos a

$$F(s) = \frac{3}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} = \mathscr{L}_0\{3e^t + 2te^t - 1 + e^{-2t}\}$$

e concluímos que

$$f(t) = 3e^t + 2te^t - 1 + e^{-2t}.$$

(5.21) *Exercício.* Escolham condições iniciais em $t = 0$ para as equações de (4.14) e (4.15). Usem a transformada de Laplace para resolver essas equações *usando essas condições iniciais*. Que adaptações é preciso fazer se não conhecermos as condições iniciais?

(5.22) A TRANSFORMADA INVERSA. Por esta altura, já devem ter reparado que, mesmo já tendo $F(s)$, nem sempre é imediato determinar a função $f(s)$ original. Por vezes, é mais rápido usar a transformada inversa.

Se o integral que define $F(s) = \mathscr{L}_c\{f\}(s) = \mathscr{L}\{H_c f\}(s)$ (onde f é alguma função dominada por e^{at}) convergir em $\operatorname{Re} s > a$, então a transformada inversa é

$$\mathscr{L}^{-1}\{F\}(t) = (H_c f)(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{b-iT}^{b+iT} e^{st} F(s)\,\mathrm{d}s,$$

onde b é um real em $\operatorname{Re} s > a$ e o integral é feito ao longo de um segmento de reta. (Não vamos tentar provar este resultado.) É prático escrever este integral com uma notação ligeiramente diferente:

$$(H_c f)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{st} F(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Reparem que a expressão de $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$ não depende do ponto c onde começa o primeiro troço de $H_c f$. Porém, se estivermos a considerar alguma função f que não está "cortada" para trás de nenhum c, temos de a "cortar" (ou seja, temos de escolher algum c—tipicamente o ponto onde temos condições iniciais—e calcular $\mathscr{L}_c\{f\}$), e a função que obtemos a partir deste novo integral é a função "cortada".

Notem também que a exponencial neste integral (que define a transformada inversa $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$) tem o sinal oposto da exponencial no integral que define a transformada direta (isto é, a transformada original $\mathscr{L}\{f\}$). Isto é um fenómeno habitual com transformadas integrais (essencialmente, porque todas são casos particulares de uma transformada mais geral que tem essa propriedade).

Outro ponto importante é que a reta ao longo da qual calculamos o integral (a reta vertical $\operatorname{Re} s = b$) está contida na região $\operatorname{Re} s > a$ (isto é, $b > a$), onde a é a constante da exponencial e^{at} que domina f. Em particular, F não tem quaisquer singularidades à direita dessa reta.

Vamos usar o teorema dos resíduos para calcular o integral da transformada inversa. Deste ponto em diante vamos considerar apenas funções F satisfazendo

$$|F(s)| \le C \left| \frac{e^{-ds}}{s^k} \right|, \quad \text{quando } s \to \infty,$$

onde $C, d \in \mathbb{R}$ e k é um inteiro positivo. (Como só nos interessa o comportamento quando $s \to \infty$, não se justifica ajustar esta condição de modo a dar-lhe sentido em $s = 0$.) Notem que todas as transformadas com que temos lidado satisfazem esta condição.

Vamos concluir que, se $t < d$ e a reta $\operatorname{Re} s = b$ estiver à direita de todos os polos de $F(s)$, então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{st} F(s)\,\mathrm{d}s = 0.$$

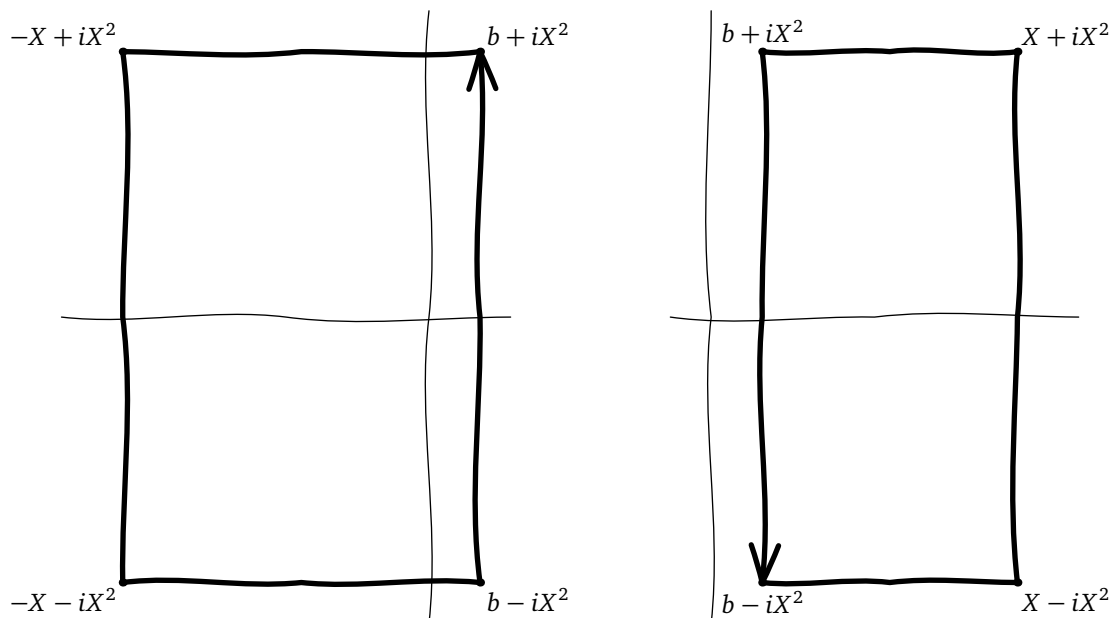
Por outro lado, se $t > d$ (e a reta $\operatorname{Re} s = b$ continuar à direita de todos os polos), então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{st}\,F(s)\,\mathrm{d}s = \text{soma dos resíduos de } s \mapsto e^{st}\,F(s).$$

(5.23) *Exercício.* Para o caso $t < d$, considerem o caminho γ que contorna o retângulo de vértices $b - iX^2, X - iX^2, X + iX^2, b + iX^2$.

(a) Usem o teorema dos resíduos para mostrar que $\int_\gamma e^{st}\,F(s)\,\mathrm{d}s = 0$.

(b) Usem estimativas de integrais para mostrar que os integrais ao longo dos segmentos horizontais e do segmento à direita convergem para 0 quando $X \to +\infty$. (Não se esqueçam que $t < d$, nem das hipóteses sobre $F(s)$.)

(c) O que podem concluir sobre $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F\}$ quando $t < d$?

(5.24) *Exercício.* Para o caso $t > d$, considerem o caminho γ que contorna o retângulo de vértices $-X - iX^2$, $b - iX^2$, $b + iX^2$, $-X + iX^2$.

(a) Usem o teorema dos resíduos para calcular $\int_\gamma e^{st}\,F(s)\,\mathrm{d}s$.

(b) Usem estimativas de integrais para mostrar que os integrais ao longo dos segmentos horizontais e do segmento à esquerda convergem para 0 quando $X \to +\infty$. (Não se esqueçam que $t > d$, nem das hipóteses sobre $F(s)$.)

(c) O que podem concluir sobre $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F\}$ quando $t > d$?

(5.25) Vejamos se isto nos ajuda com o exemplo (5.20). Tínhamos

$$\mathscr{L}\{H_0 f\} = F(s) = \underbrace{\frac{3}{s-1}}_{\mathscr{L}_0\{3e^t\}} + \frac{6}{(s-1)^2\,(s+2)} + \frac{2}{s\,(s+2)\,(s-1)},$$

queremos determinar f. Para a primeira parcela nem precisamos da transformada inversa, pois é imediato que a função original é

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-1}\right\}=H_0(t)\,\big(3e^t\big).$$

A função original para a segunda parcela é

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s-1)^2\,(s+2)}\right\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{6e^{st}}{(s-1)^2\,(s+2)}\,\mathrm{d}s\,.$$

Se $t<0$, sabemos que o resultado é 0. Se $t>0$, precisamos dos resíduos. Temos um polo simples em $s=-2$ e um polo duplo em $s=1$. Os seus resíduos são dados pela fórmula de Cauchy:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{s=-2}\frac{6e^{st}}{(s-1)^2\,(s+2)}&=\left(\frac{6e^{st}}{(s-1)^2}\right)_{s=-2}=\frac{6e^{-2t}}{(-3)^2}=\frac{2}{3}e^{-2t},\\ \operatorname*{Res}_{s=1}\frac{6e^{st}}{(s-1)^2\,(s+2)}&=\left(\frac{6e^{st}}{s+2}\right)'_{s=1}=\left(\frac{6te^{st}(s+2)-6e^{st}}{(s+2)^2}\right)_{s=1}=2te^t-\frac{2}{3}e^t.\end{aligned}$$

Ou seja, a função original é $H_0(t)\big(\frac{2}{3}e^{-2t}+2te^t-\frac{2}{3}e^t\big)$.

Finalmente, a função original para a terceira parcela é

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s\,(s+2)\,(s-1)}\right\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{2e^st}{s\,(s+2)\,(s-1)}\,\mathrm{d}s\,.$$

Como o integral só é não-nulo se $t>0$ e como todas as singularidades são polos simples, ficamos com

$$\begin{aligned}H_0\cdot\big(\operatorname*{Res}_{s=0}+\operatorname*{Res}_{s=-2}+\operatorname*{Res}_{s=1}\big)&=H_0(t)\left(\left(\frac{2e^{st}}{(s+2)\,(s-1)}\right)_{s=0}+\left(\frac{2e^{st}}{s\,(s-1)}\right)_{s=-2}+\left(\frac{2e^{st}}{s\,(s+2)}\right)_{s=1}\right)\\&=H_0(t)\left(-1+\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\right).\end{aligned}$$

Juntando as três parcelas, chegamos a

$$\begin{aligned}(H_0f)(t)&=H_0(t)\,\big(3e^t\big)+H_0(t)\,\big(\tfrac{2}{3}e^{-2t}+2te^t-\tfrac{2}{3}e^t\big)+H_0(t)\,\big(-1+\tfrac{1}{3}e^{-2t}+\tfrac{2}{3}e^t\big)\\&=H_0(t)(3e^t+e^{-2t}+2te^t-1).\end{aligned}$$

(5.26) Vejamos um último exemplo, desta vez com uma função definida por troços. A equação

$$f''-2f'+10f=-10H_\pi,\qquad f(0)=0,\qquad f'(0)=-2$$

pode ser resolvida usando a transformada de Laplace. Se $F=\mathscr{L}_0\{f\}$, temos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0\{f'\}&=s\,F(s)-f(0)=s\,F(s),\\ \mathscr{L}_0\{f''\}&=s^2\,F(s)-s\,f(0)-f'(0)=s^2\,F(s)+2,\\ \mathscr{L}_0\{-10H_\pi\}&=\frac{-10e^{-\pi s}}{s}.\end{aligned}$$

Assim, ao aplicarmos a transformada de Laplace à equação original obtemos

$$(s^2 F(s)+2)-2(s\,F(s))+10F(s)=\frac{-10e^{-\pi s}}{s},$$

que nos leva a

$$F(s)=-\frac{2}{s^2-2s+10}-\frac{10e^{-\pi s}}{s\,(s^2-2s+10)}.$$

Para determinar $H_0 f$, vamos separar $F(s)$ em parcelas, de acordo com as exponenciais envolvidas (pois a exponenciais com constantes diferentes, correspondem troços diferentes onde a função que procuramos é não-nula). Notamos ainda que

$$s^2-2s+10=(s-1-3i)(s-1+3i)=(s-1)^2+3^2.$$

A função original é então dada por

$$(H_0 f)(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2e^{-0t}}{(s-1)^2+3^2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-10e^{-\pi s}}{s\,(s-1-3i)(s-1+3i)}\right\}.$$

A primeira parcela é não-nula apenas quando $t>0$. De facto, podemos reconhecê-la diretamente:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{(s-1)^2+3^2}\right\}=-\frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2+3^2}\right\}=-\frac{2}{3}H_0(t)\,e^t\sin(3t).$$

A segunda parcela é

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-10e^{-\pi s}}{s\,(s-1-3i)(s-1+3i)}\right\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{-10e^{(t-\pi)s}}{s\,(s-1-3i)(s-1+3i)}\,\mathrm{d}s$$

(reparem que todos os polos estão à esquerda da reta vertical $\mathrm{Re}\, s=2$, por isso podemos usá-la no integral). Se $t<\pi$, este integral é 0. De contrário, somamos todos os resíduos. Posto de outra forma,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}&\left\{\frac{10e^{-\pi s}}{s\,(s-1-3i)(s-1+3i)}\right\}=H_\pi(t)\left(\operatorname*{Res}_{s=0}+\operatorname*{Res}_{s=1+3i}+\operatorname*{Res}_{s=1-3i}\right)\\
&=H_\pi(t)\left(\left(\frac{-10e^{(t-\pi)s}}{(s-1-3i)(s-1+3i)}\right)_{s=0}+\left(\frac{-10e^{(t-\pi)s}}{s\,(s-1+3i)}\right)_{s=1+3i}+\left(\frac{-10e^{(t-\pi)s}}{s\,(s-1-3i)}\right)_{s=1-3i}\right)\\
&=H_\pi(t)\left(-1-\frac{10e^{(1+3i)(t-\pi)}}{(1+3i)(1+3i-1+3i)}-\frac{10e^{(1-3i)(t-\pi)}}{(1-3i)(1-3i-1-3i)}\right).
\end{aligned}$$

Nem sempre é útil, mas neste caso vamos simplificar um pouco mais. Vamos usar $u=t-\pi$ e $10=(1-3i)(1+3i)$. Ficamos então com

$$\begin{aligned}
&-1-\frac{10e^{(1+3i)(t-\pi)}}{(1+3i)(1+3i-1+3i)}-\frac{10e^{(1-3i)(t-\pi)}}{(1-3i)(1-3i-1-3i)}\\
&=-1-\frac{(1-3i)\,e^{(1+3i)u}}{6i}-\frac{(1+3i)\,e^{(1-3i)u}}{-6i}=-1-\frac{e^{(1+3i)u}-e^{(1-3i)u}}{6i}+\frac{e^{(1+3i)u}+e^{(1-3i)u}}{2}\\
&=-1-\frac{1}{3}e^u\sin(3u)+e^u\cos(3u)=-1-\frac{1}{3}e^{t-\pi}\sin(3t-3\pi)+e^{t-\pi}\cos(3t-3\pi)
\end{aligned}$$

Juntando tudo, obtemos (finalmente)

$$\begin{aligned}(H_0 f)(t) &= -\tfrac{2}{3}H_0(t)\,e^t\sin(3t) + H_\pi(t)\bigl(-1-\tfrac{1}{3}e^{t-\pi}\sin(3t-3\pi)+e^{t-\pi}\cos(3t-3\pi)\bigr)\\ &= -\tfrac{2}{3}H_0(t)\,e^t\sin(3t) + H_\pi(t)\bigl(-1+\tfrac{1}{3}e^{t-\pi}\sin(3t)-e^{t-\pi}\cos(3t)\bigr).\end{aligned}$$

(5.27) *Exercício.* Escrevam esta função $H_0 f$ sem usar funções de Heaviside (isto é, na forma habitual, por troços). Façam o mesmo com f. Comparem este método com o que usámos no exercício (4.19).

(5.28) *Exercício.* Conseguem ver a relação entre a mudança de variável que fizemos ainda agora ($u = t - \pi$) e a mudança de variável que fizemos no final de (5.5)? A partir daí, conseguem encontrar uma forma um pouco mais "arrumada" de obter a transformada inversa de uma parcela envolvendo exponenciais? Qual a relação entre o parâmetro na exponencial e a função de Heaviside que ocorre na resposta final?

(5.29) *Exercício.* Usem a transformada de Laplace para resolver as equações de (4.16).

(5.30) *Exercício.* Usem a transformada de Laplace para resolver as equações de (4.17).

(5.31) *Exercício.* Usem a transformada de Laplace para resolver as equações de (4.20).

(5.32) RESPOSTAS DE EXERCÍCIOS.

(5.2) (a) $e^t + e^{2t} H_1(t)$. (b) $e^t + (e^{2t} - e^t) H_1(t)$. (c) $e^{3t} H_{-2}(t) + (e^{2t} - e^{3t}) H_1(t)$. (d) $t^2 H_0(t) + (\cos t - t^2) H_3(t) + (\sin t - \cos t) H_5(t)$. (e) $t^2 H_0(t) + (e^t - t^2) H_1(t) + (t^e - e^t) H_e(t)$. (f) $(t - t^2) H_1(t) + (2t^2 - t + e^t) H_2(t) + (1 - 2e^t - t^2) H_4(t) + (e^t - 1) H_6(t)$.

(5.3) (a) $\begin{cases} 0, & \text{se } t < 2, \\ 1, & \text{se } 2 < t < \pi, \\ 2, & \text{se } \pi < t < 5, \\ -1, & \text{se } 5 < t. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 0, & \text{se } t < 1, \\ 5, & \text{se } 1 < t < 2, \\ 6, & \text{se } 2 < t < \pi, \\ 7, & \text{se } \pi < t < 5, \\ 4, & \text{se } 5 < t. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -2, & \text{se } t < 1, \\ 3, & \text{se } 1 < t < 2, \\ 4, & \text{se } 2 < t < \pi, \\ 5, & \text{se } \pi < t < 5, \\ 2, & \text{se } 5 < t. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 0, & \text{se } t < 1, \\ -e^t, & \text{se } 1 < t < 2, \\ e^{2t} - e^t, & \text{se } 2 < t < 3, \\ e^{2t}, & \text{se } 3 < t. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 0, & \text{se } t < -1, \\ \cos(3t), & \text{se } -1 < t < 0, \\ 1 + \cos(3t), & \text{se } 0 < t. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} e^t, & \text{se } t < -1, \\ e^t + \cos(3t), & \text{se } -1 < t < 0, \\ e^t + 1 + \cos(3t), & \text{se } 0 < t. \end{cases}$

(5.4) (a) 2. (b) 6. (c) 4. (d) 10.

(5.7) (a) $\frac{1}{s-5}$. (b) $\frac{3}{s-5}$. (c) $\frac{e^{-2(s-5)}}{s-5}$. (d) $\frac{1}{s-2i}$. (e) $\frac{10}{s-4} + \frac{1}{s-5}$. (f) $\frac{3}{s-4} - \frac{1}{s-6}$. (g) $\frac{1}{s-4} - \frac{e^{-2(s-5)}}{s-5}$. (h) $\frac{1-e^{-2(s-4)}}{s-4} + \frac{e^{-2(s-5)}}{s-5}$.

(5.8) (a) $e^{3t} H_0(t)$. (b) $20e^{3t} H_0(t)$. (c) $(20e^{3t} - 4e^{5t}) H_0(t)$. (d) $H_2(t)$. (e) $e^t H_2(t)$. (f) $e^{t-2} H_2(t) + e^2 H_0(t)$. (g) $(e^t - e^{-2t}) H_0(t)$. (h) $\frac{e^{t-1} - e^{1-t}}{2} H_1(t) + \frac{e^t - e^{-t}}{2} H_0(t)$.

(5.10) (a) $\frac{5}{(s-3)^2+5^2}$. (b) $\frac{1}{2(s-3)} + \frac{s-3}{2((s-3)^2+10^2)}$. (c) $\frac{-5e^{-\pi(s-3)}}{(s-3)^2+5^2}$. (d) $\frac{e^{-\pi(s-3)}}{2}\left(\frac{1}{s-3} - \frac{s-3}{(s-3)^2+10^2}\right)$.

(5.11) (a) $\frac{e^{-\pi s} + e^{-2s} - 3e^{-5s}}{s}$. (b) $\frac{e^{-\pi s} + e^{-2s} - 3e^{-5s} + 5e^{-s}}{s}$. (c) usando H_0: $\frac{e^{-\pi s} + e^{-2s} - 3e^{-5s} + 5e^{-s} - 2}{s}$. (d) $\frac{e^{-3(s-1)} - e^{-(s-1)}}{s-1} + \frac{e^{-2(s-2)}}{s-2}$. (e) $\frac{1}{s} + \frac{e^{s-3i}}{2(s-3i)} + \frac{e^{s+3i}}{2(s+3i)}$. (f) usando H_0: $\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+3^2}$.

(5.12) (a) $e^{3t} \cos(4t) H_0(t)$. (b) $\frac{3}{4} e^{3t} \sin(4t) H_0(t)$. (c) $e^{3t}\left(\cos(4t) + \frac{3}{4}\sin(4t)\right) H_0(t)$. (d) $e^{3t}\left(\cos(4t) - \frac{1}{4}\sin(4t)\right) H_0(t)$. (e) $e^t \sin t\, H_0(t)$. (f) $(1 - e^t \sin t) H_0(t)$. (g) $(e^t \sin t - e^t \sin(2t)) H_0(t)$. (h) $e^t \sin t\, H_0(t) + H_{-2}(t)$. (i) $e^{t+2} \sin(t+2) H_{-2}(t)$.

(5.16) (a) $\frac{1}{s-4}$. (b) $\frac{3}{s-4}$. (c) $\frac{1}{s-3}$. (d) $\frac{1}{s-3} + \frac{3}{s-4}$. (e) $\frac{1}{s-i}$. (f) $\frac{1}{s+i}$. (g) $\frac{1}{2(s-i)} + \frac{1}{2(s+i)}$. (h) $\frac{1}{2(s-i)} + \frac{1}{2(s+i)}$. (i) $\frac{1}{(s-3-2i)^2}$. (j) $\frac{1}{(s-3+2i)^2}$. (k) $\frac{1}{2i(s-3-2i)^2} - \frac{1}{2i(s-3-2i)^2}$. (l) $\frac{1}{2(s-3-2i)^2} + \frac{1}{2(s-3-2i)^2}$. (m) $\frac{1}{(s-3)^2} - \frac{2}{(s-3)^2}$. (n) $\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{1}{i(s-3-2i)^3} - \frac{1}{i(s-3+2i)^3}$. (o) $\frac{2}{s^2+2^2} + \frac{3}{(s-2i)^4} + \frac{3}{(s+2i)^4}$. (p) $\frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4^2)}$.

(5.17) (a) $\cos t\, H_0(t)$. (b) $\frac{e^t + e^{-t}}{2} H_0(t)$. (c) $\frac{te^{-t} - te^t}{2} H_0(t)$. (d) $t \sin t\, H_0(t)$. (e) $\frac{1}{6} te^t \sin(3t) H_0(t)$. (f) $\frac{1}{5!} t^5 e^t H_0(t)$. (g) $\frac{1}{4!} t^4 e^t H_0(t)$. (h) $\left(\frac{1}{4!} t^4 + \frac{1}{5!} t^5\right) e^t H_0(t)$. (i) $\frac{1}{5!}(t+3)^5 e^{t+3} H_{-3}(t)$.

(5.19) (a) $e^{3t} - e^t$. (b) $2e^{3t} - e^t$. (c) $2e^{3t} + te^{3t}$. (d) $1 + 2e^{3t}$. (e) $e^t + 3e^{3t} + te^{3t}$.

(5.27)

$$\begin{cases} 0, & \text{se } t < 0, \\ -\frac{2}{3} e^t \sin(3t), & \text{se } 0 < t < \pi, \\ -\frac{2}{3} e^t \sin(3t) - 1 + \frac{1}{3} e^{t-\pi} \sin(3t) - e^{t-\pi} \cos(3t), & \text{se } \pi < t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} e^t \sin(3t), & \text{se } t < \pi, \\ -\frac{2}{3} e^t \sin(3t) - 1 + \frac{1}{3} e^{t-\pi} \sin(3t) - e^{t-\pi} \cos(3t), & \text{se } \pi < t. \end{cases}$$

(5.29) (a) $te^{5t} + e^{3t}$. (b) $2e^{5t} - e^{4t} - 2te^{4t}$. (c) $e^{5t} - e^{4t} \sin t$. (d) $e^{4t} \cos(2t)$. (e) $e^{4t} \cos(2t) - \frac{3}{4} te^{4t} \sin(2t)$. (f) $t^3 e^t - 2t^2 e^t + 2te^t - e^t$.

(5.30) (a) $-2 + \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{\sqrt{2}\, t} + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{-\sqrt{2}\, t}$. (b) $te^{-2t} - 2e^t \cos(\sqrt{3}\, t)$.

(5.31) (a) $\begin{cases} te^{5t} + e^{3t}, & \text{se } t < 1, \\ e^{3t} + \frac{3}{2} e^{5t} - \frac{1}{2} e^{3t+2}, & \text{se } t > 1. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \frac{1}{2} e^{5t} + \frac{1}{2} e^{3t}, & \text{se } t < 1, \\ -e^{5t} + \frac{1}{2} e^{3t} + te^{5t} + \frac{1}{2} e^{3t+2}, & \text{se } t > 1. \end{cases}$

EPISÓDIO 6

AS SÉRIES DE FOURIER

Imaginem que queremos resolver a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Como é que alguém poderia resolver uma equação desse género? Na falta de outras ideias, uma opção é tentar encontrar soluções por tentativa e erro. Por exemplo, podemos substituir $u(t,x) = T(t) \cdot X(x)$ e ver o que acontece. Chegamos (como?) a $T'(t) \cdot X(x) = T(t) \cdot X''(x)$. Separando tudo o que tenha t para a esquerda e tudo o que tenha x para a direita, obtemos

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Se essas duas expressões são iguais, então não podem depender nem de t (porque não há t no lado direito) nem de x (porque não há x no lado esquerdo). Ou seja, são iguais a uma constante λ. Por exemplo, a segunda equação fica equivalente a

$$(D^2 - \lambda)X = 0$$

(usando D para indicar a derivada em ordem a x). Suponhamos ainda que $0 \leq x \leq 1$ e que $u(t,0) = u(t,1) = 0$ (a *condição de fronteira*), o que, se $T(t) \neq 0$, implica $X(0) = X(1) = 0$. Para termos $X(x) \neq 0$, precisamos de $\lambda < 0$ (isto não é bem assim com outras condições de fronteira), e nesse caso as soluções desta última equação diferencial são

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, x).$$

Mas para termos $X(0) = X(1) = 0$, temos necessariamente $C_1 = 0$ e $\sqrt{-\lambda} = \pi k$ (para algum inteiro k). Ou seja, neste momento já sabemos que $u(t,x) = T(t) \sin(\pi k x)$ (absorvemos a constante C_2 na definição de $T(t)$), que $T'(t) = \lambda T(t)$, e que $\lambda = -\pi^2 k^2$.

Usando agora D para representar a derivada em ordem a t, vemos que $(D - \lambda) T = 0$, cuja solução é $T(t) = e^{\lambda t} T(0)$. Ou seja, a solução final é um múltiplo de $e^{-\pi^2 k^2 t} \sin(\pi k x)$.

Mais geralmente, seria razoável assumir que a solução geral seja da forma

$$u(t,x) = \sum_{k>0} b_k \, e^{-\pi^2 k^2 t} \sin(\pi k x).$$

Este é o nosso primeiro exemplo de uma série de Fourier.

Neste episódio, falamos um pouco das séries de Fourier e das suas variantes (as séries de senos e as séries de cossenos). No próximo, vamos ver como usá-las para resolver algumas equações diferenciais parciais (EDPs)—assim chamadas por envolverem derivadas parciais.

(6.1) FUNÇÕES PERIÓDICAS. Nas próximas páginas vamos trabalhar apenas com funções periódicas seccionalmente C^∞. Mais concretamente, vamos fixar um intervalo $[A,B]$ de comprimento $\ell = B - A$, e considerar apenas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seccionalmente C^∞ e com período ℓ.

Dizer que f tem período ℓ é dizer que $f(x+\ell) = f(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Reparem que se a função tem período ℓ, também tem período 2ℓ ou 3ℓ ou $-\ell$. Ou seja, da forma como estamos a definir ter período ℓ, não há nenhuma sugestão de que ℓ seja o número mais pequeno para o qual $f(x+\ell) = f(x)$. (Conseguem imaginar alguma função com período ℓ para todo o $\ell > 0$? Conseguem imaginar duas funções com período ℓ para todo o $\ell \in \mathbb{Q}$? Linearmente independentes?)

E o que queremos dizer com uma função ser *seccionalmente* C^∞? No nosso caso, apenas que existe um número finito de pontos intermédios (que podem ser diferentes de função para função) com $A = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = B$ e que em cada subintervalo $]x_i, x_{i+1}[$ a função é a restrição de uma função C^∞ definida num intervalo ligeiramente maior. (Pôr isto desta forma evita algumas complicações com limites laterais das derivadas da função.)

Alternativamente, podemos começar com funções seccionalmente C^∞ definidas no intervalo $]A,B[$ (porquê aberto?) e estendê-las a $\mathbb{R}$ de forma a terem período $\ell = B - A$. De facto, o intervalo exato que escolhemos não é especialmente relevante (porquê?). Porém, nos problemas com que vamos lidar pode ser mais prático lidar com intervalos de certos formatos.

(6.2) PRODUTO INTERNO DE FUNÇÕES PERIÓDICAS. Concentramo-nos então nas funções seccionalmente C^∞ de período ℓ. Escolhemos qualquer intervalo $[A,B]$ de comprimento $\ell = B - A$, e definimos o seguinte produto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_A^B f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Como habitualmente, a norma correspondente é definida por $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

(6.3) *Exercício.* Provem as seguintes propriedades deste produto (f, g, h são funções seccionalmente C^∞ definidas em $[A,B]$, c é um complexo):

(a) $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$

(b) $\langle cf, g\rangle = c\langle f, g\rangle$ e $\langle f, cg\rangle = \overline{c}\langle f, g\rangle$;

(c) $\langle f+g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$ e $\langle f, g+h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$;

(d) $\|f\| \geq 0$;

(e) se $\|f\| = 0$, então $f = 0$.

(6.4) *Exercício.* Mostrem que se f e g têm período ℓ e ambos os intervalos $[A,B]$ e $[A',B']$ têm comprimento ℓ, então

$$\int_A^B f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{A'}^{B'} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

(6.5) Base ortogonal para funções periódicas. Vamos agora concentrar-nos em funções de período 2π. Não vamos tentar demonstrar tudo (ou explicar rigorosamente o que as diferentes afirmações significam), mas a ideia é que temos uma base ortogonal para estas funções.

Onde vamos buscar uma tal base? Se o operador D (derivação em ordem a x) fosse diagonalizável (de novo, sem tentar definir rigorosamente as palavras que usamos em contextos novos), então esperaríamos ter uma base de vetores próprios. Quem são os vetores próprios de D? A função f é um vetor próprio de D com valor próprio λ se $Df = f' = \lambda f$. Conhecemos as soluções dessa equação: são da forma $e^{\lambda x} f(0)$. Mas são periódicas?

(6.6) *Exercício.* Mostrem que $f(x) = e^{\lambda x} f(0)$ define uma função de período 2π só se $f(0) = 0$ ou $\lambda = ni$, com $n \in \mathbb{Z}$.

(6.7) *Exercício.* Dados $n, m \in \mathbb{Z}$, mostrem que as funções e^{nix} e e^{mix} são ortogonais (estamos a usar qualquer intervalo de comprimento 2π, por exemplo, $[0, 2\pi]$) desde que $n \neq m$. Qual a norma de e^{nix}?

(6.8) *Exercício.* Se f e g são funções C^∞ de período 2π (continuamos a usar o intervalo $[0, 2\pi]$), mostrem que:

(a) $f(2\pi) = f(0)$ e $g(2\pi) = g(0)$;
(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{g(x)} = \overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)}$ (*não* é a derivada complexa, pois a *variável* não é complexa);
(c) $\langle f, D^2 g \rangle = \langle D^2 f, g \rangle$ (onde D representa $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$);
(d) $-\langle f, D^2 f \rangle \geq 0$.

(6.9) *Exercício.* Mostrem que e^{nix} (com $n \in \mathbb{Z}$) é um vetor próprio de D^2. Qual o valor próprio?

(6.10) *Exercício.* Fixem $n, m \in \mathbb{Z}$ com $n \neq m$. Tendo em conta que e^{nix} é ortogonal a e^{mix}, mostrem que $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ são ortogonais a $\cos(mx)$ e a $\sin(mx)$. (Continuamos a trabalhar no intervalo $[0, 2\pi]$.)

(6.11) *Exercício.* Fixem um inteiro $n > 0$. Usando exponenciais complexas ou outra técnica que prefiram, mostrem que $\cos(nx)$ é ortogonal a $\sin(nx)$. Determinem a norma de ambas as funções. Mostrem ainda que ambas são ortogonais à função constante igual a 1, e determinem a norma desta última função. (Continuamos a trabalhar em $[0, 2\pi]$.)

(6.12) Séries de Fourier. Em termos práticos, a conclusão de tudo isto é que vamos usar uma base ortogonal com as funções 1, $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ (usando todos os inteiros $n > 0$). Nesse caso, uma função f de período 2π pode ser escrita como combinação linear dessas funções:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n>0} a_n \cos(nx) + \sum_{n>0} b_n \sin(nx).$$

A uma tal soma chamamos *série de Fourier* para f. (Notem que isto pode não ser bem uma igualdade; vamos esclarecer este ponto um pouco mais à frente.)

E quem são os coeficientes da série de Fourier? Como as diferentes funções da base são ortogonais entre si, vamos ter:

$$\langle f,1\rangle = \langle a_0,1\rangle, \quad \langle f,\cos(nx)\rangle = \langle a_n\cos(nx),\cos(nx)\rangle, \quad \langle f,\sin(nx)\rangle = \langle b_n\sin(nx),\sin(nx)\rangle$$

(verifiquem!), o que nos leva a (aqui, $n>0$)

$$a_0 = \frac{\langle f,1\rangle}{\|1\|^2}, \qquad a_n = \frac{\langle f,\cos(nx)\rangle}{\|\cos(nx)\|^2}, \qquad b_n = \frac{\langle f,\sin(nx)\rangle}{\|\sin(nx)\|^2}$$

(concordam?).

No caso de um intervalo mais geral, da forma $[A,B]$ e com comprimento $\ell = B-A$, podemos usar as mudanças de variável $x = A+\frac{\ell}{2\pi}u$ e $u = \frac{2\pi}{\ell}(x-A) = \frac{2\pi}{\ell}x - \frac{2\pi A}{\ell}$ para converter entre $u \in [0,2\pi]$ e $x \in [A,B]$. Nesse caso, os limites de integração devem ser ajustados (passar de 0 a 2π para de A a B). Podemos então usar uma base ortogonal com as funções 1, $\cos(nu) = \cos(\frac{2\pi nx}{\ell} - \frac{2\pi nA}{\ell})$ e $\sin(nu) = \sin(\frac{2\pi nx}{\ell} - \frac{2\pi nA}{\ell})$ (tal como antes, usando todos os inteiros $n>0$). Porém, isto é desnecessariamente complicado; podemos perfeitamente eliminar os $\frac{2\pi nA}{\ell}$ obtendo uma base ligeiramente diferente: 1, $\cos(\frac{2\pi nx}{\ell})$ e $\sin(\frac{2\pi nx}{\ell})$. Para cada n, as novas funções são combinação linear das antigas e vice-versa (conseguem ver porquê?), mas a nova versão é mais prática.

Assim, dada uma função de período ℓ (usando o intervalo $[A,B]$ de comprimento $\ell = B-A$), escrevemos

$$f(x) = a_0 + \sum_{n>0} a_n \cos\tfrac{2\pi nx}{\ell} + \sum_{n>0} b_n \sin\tfrac{2\pi nx}{\ell}$$

e temos, como antes (e ainda com $n>0$),

$$a_0 = \frac{\langle f,1\rangle}{\|1\|^2}, \qquad a_n = \frac{\langle f,\cos\frac{2\pi nx}{\ell}\rangle}{\|\cos\frac{2\pi nx}{\ell}\|^2}, \qquad b_n = \frac{\langle f,\sin\frac{2\pi nx}{\ell}\rangle}{\|\sin\frac{2\pi nx}{\ell}\|^2}.$$

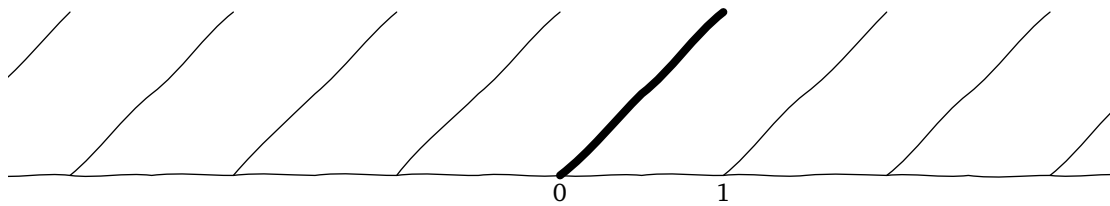
Ou, tendo em conta, como vimos em (6.11), que $\|1\|^2 = \ell$ e $\|\cos\frac{2\pi nx}{\ell}\|^2 = \|\sin\frac{2\pi nx}{\ell}\|^2 = \frac{\ell}{2}$,

$$a_0 = \tfrac{1}{\ell}\langle f,1\rangle, \qquad a_n = \tfrac{2}{\ell}\langle f,\cos\tfrac{2\pi nx}{\ell}\rangle, \qquad b_n = \tfrac{2}{\ell}\langle f,\sin\tfrac{2\pi nx}{\ell}\rangle.$$

Neste ponto, vale a pena fazer um aviso: alguns autores usam uma convenção ligeiramente diferente, em que a_0 tem a mesma fórmula que a_n ($n>0$), e na série de Fourier de f usam $\frac{a_0}{2}$ em vez de a_0. Com qualquer das convenções, o resultado final é

$$f(x) = \tfrac{1}{\ell}\langle f,1\rangle + \sum_{n>0}\tfrac{2}{\ell}\langle f,\cos\tfrac{2\pi nx}{\ell}\rangle\cos\tfrac{2\pi nx}{\ell} + \sum_{n>0}\tfrac{2}{\ell}\langle f,\sin\tfrac{2\pi nx}{\ell}\rangle\sin\tfrac{2\pi nx}{\ell}.$$

(De novo: isto não é bem uma igualdade e vamos esclarecer os detalhes mais à frente.)

(6.13) Vejamos um exemplo. Vamos considerar a função f de período 1 definida no intervalo $]0,1[$ por $f(x) = x$. (Qual é a sua definição no intervalo $]1,2[$? E no intervalo $]0,2[$? Não dissemos qual o valor em $x=1$. Faz diferença?)

A sua série de Fourier é dada por

$$a_0 + \sum_{n>0} a_n \cos(2\pi nx) + \sum_{n>0} b_n \sin(2\pi nx),$$

e os respetivos coeficientes (de novo, $n > 0$) são

$$\begin{aligned} a_0 &= \langle f, 1 \rangle = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x, \\ a_n &= 2 \langle f, \cos(2\pi nx) \rangle = \int_0^1 2x \cos(2\pi nx) \, \mathrm{d}x, \\ b_n &= 2 \langle f, \sin(2\pi nx) \rangle = \int_0^1 2x \sin(2\pi nx) \, \mathrm{d}x \, . \end{aligned}$$

Basta-nos calcular estes integrais. Para o primeiro, temos simplesmente

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \tfrac{1}{2}.$$

Para o segundo, podemos usar integração por partes:

$$\int_0^1 2x \cos(2\pi nx) \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x \sin(2\pi nx)}{\pi n} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n} \, \mathrm{d}x = - \int_0^1 \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n} \, \mathrm{d}x$$

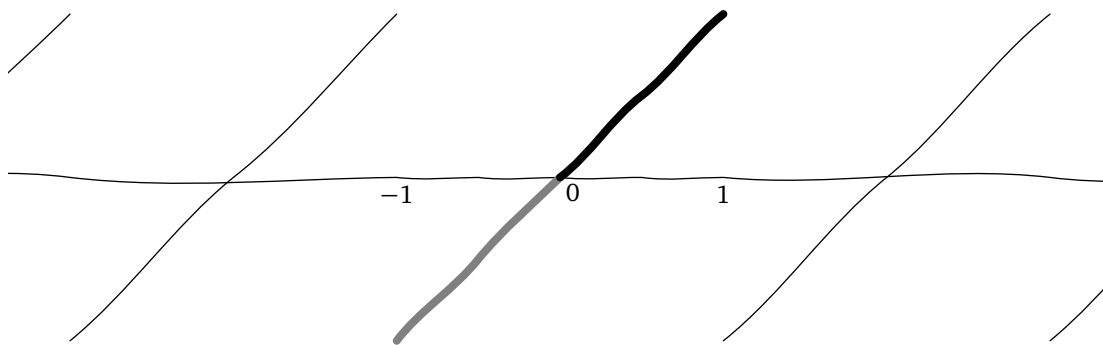
Este último integral é na verdade $\langle 1, \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n} \rangle$ (isto só funciona porque o integral é ao longo de todo o intervalo!), portanto o seu valor é 0 (porquê?) e $a_n = 0$ quando $n > 0$. Para o terceiro coeficiente usamos de novo integração por partes:

$$\int_0^1 2x \sin(2\pi nx) \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{x \cos(2\pi nx)}{\pi n} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{\cos(2\pi nx)}{\pi n} \, \mathrm{d}x$$

O último integral é $\langle 1, -\frac{\cos(2\pi nx)}{\pi n} \rangle$, que também é 0 (porquê?), e ficamos apenas com a outra parcela:

$$\int_0^1 2x \sin(2\pi nx) \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{x \cos(2\pi nx)}{\pi n} \right]_0^1 = -\frac{\cos(2\pi n)}{\pi n} = -\frac{1}{\pi n}.$$

Concluímos que a série de Fourier é

$$\tfrac{1}{2} - \sum_{n>0} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}.$$

(6.14) Vejamos um exemplo parecido, mas agora com uma função ímpar: a função f de período 2 definida no intervalo $]-1,1[$ por $f(x)=x$. (Qual é a sua definição no intervalo $]1,3[$? E no intervalo $]0,2[$?) A sua série de Fourier é

$$a_0+\sum_{n>0} a_n\cos(\pi nx)+\sum_{n>0} b_n\sin(\pi nx)$$

e os respetivos coeficientes (com $n>0$) são

$$a_0=\frac{1}{2}\langle f,1\rangle=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x,$$
$$a_n=\langle f,\cos(\pi nx)\rangle=\int_{-1}^{1} x\cos(\pi nx)\,\mathrm{d}x,$$
$$b_n=\langle f,\sin(\pi nx)\rangle=\int_{-1}^{1} x\sin(\pi nx)\,\mathrm{d}x\,.$$

Para o primeiro integral, temos

$$\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=0.$$

Também podíamos observar que a função é ímpar e o intervalo é simétrico, logo o integral é 0. Aliás, essa observação permite-nos concluir imediatamente que

$$\int_{-1}^{1} x\cos(\pi nx)\,\mathrm{d}x=0.$$

Para o terceiro integral precisamos de integração por partes:

$$\int_{-1}^{1} x\sin(\pi nx)\,\mathrm{d}x=\left[-x\frac{\cos(\pi nx)}{\pi n}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}-\frac{\cos(\pi nx)}{\pi n}\,\mathrm{d}x$$

Este último integral é $\langle 1,-\frac{\cos(\pi nx)}{\pi n}\rangle$ (comparem com o exemplo anterior, e reparem que a notação do produto interno se aplica agora sobre um intervalo diferente), ou seja, 0 (porquê?). A outra parcela é

$$\int_{-1}^{1} x\sin(\pi nx)\,\mathrm{d}x=\left[-x\frac{\cos(\pi nx)}{\pi n}\right]_{-1}^{1}=-\frac{\cos(\pi n)}{\pi n}+(-1)\frac{\cos(-\pi n)}{\pi n}=-2\frac{(-1)^n}{\pi n}.$$

A nossa série de Fourier fica portanto

$$\sum_{n>0} -2\frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(\pi n x).$$

(6.15) *Exercício.* Seja f uma função ímpar de período 2ℓ. Mostrem que os coeficientes a_0 e a_n (com $n > 0$) da sua série de Fourier obtida a partir do intervalo $[-\ell, \ell]$ são todos nulos. Mostrem ainda que os coeficientes b_n podem ser calculados usando

$$b_n = \tfrac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin \tfrac{2\pi n x}{2\ell} \, \mathrm{d}x,$$

ou seja, usando a base relevante para o intervalo $[-\ell, \ell]$, mas calculando os produtos internos (tanto o integral no numerador, como o que dá origem ao denominador) como se o intervalo fosse $[0, \ell]$.

(6.16) *Exercício.* Seja f uma função par de período 2ℓ. Mostrem que os coeficientes b_n (com $n > 0$) da sua série de Fourier obtida a partir do intervalo $[-\ell, \ell]$ são todos nulos. Mostrem ainda que a_0 e a_n (com $n > 0$) são

$$a_0 = \tfrac{1}{\ell} \int_0^\ell f(x) \, \mathrm{d}x, \qquad a_n = \tfrac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos \tfrac{2\pi n x}{2\ell} \, \mathrm{d}x\,.$$

(6.17) Séries de senos. Por vezes é útil ter uma série exclusivamente com senos para alguma função f. No exercício (6.15) vimos que se f for impar, a sua série de Fourier tem apenas senos (ou seja, os coeficientes associados aos cossenos são nulos). Isso mesmo foi ilustrado no exemplo (6.14). E como os senos são funções ímpares, a soma de uma série só com senos também é uma função ímpar. Mas às vezes precisamos de algo que parece contraditório: uma série só com senos mesmo quando f não é ímpar.

Comparem os exemplos (6.13) e (6.14). No primeiro caso, a função não era ímpar, calculámos a série de Fourier em relação ao intervalo $[0, 1]$, e a série não tinha só senos. No segundo caso, a função era ímpar, calculámos a série em relação ao intervalo $[-1, 1]$, e a série tinha só senos. Naturalmente obtivemos séries diferentes, mas reparem que no intervalo $[0, 1]$ representam a mesma função (comparem os gráficos).

Dessa forma contornamos a aparente contradição: quando precisarmos de ter uma série só com senos, também só precisaremos que ela corresponda à função num intervalo da forma $[0, \ell]$. Portanto, podemos fazer um *prolongamento ímpar* da função ao intervalo $[-\ell, \ell]$ e calcular a série de Fourier (para uma função de período 2ℓ) em relação ao novo intervalo, $[-\ell, \ell]$. De acordo com o exercício (6.15), essa série tem apenas senos; daí chamarmos-lhe uma *série de senos*.

(6.18) *Exercício.* Calculem as séries de senos destas funções:

(a) $f :]0, \pi[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$;

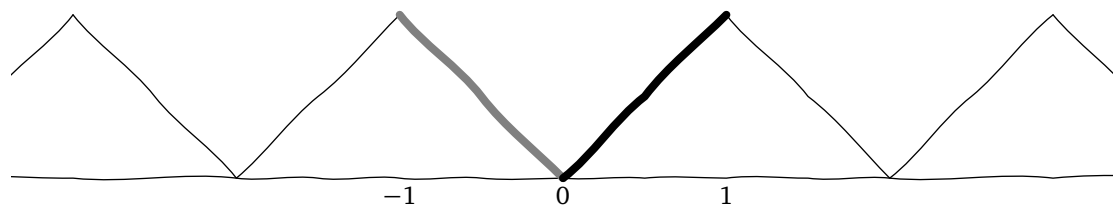
(b) $f :]0, \pi[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(2x)$;

(c) $f :]0,\pi[\to \mathbb{R} : x \mapsto \cos x$;
(d) $f :]0,\pi[\to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(2x)$;
(e) $f :]0,\pi[\to \mathbb{R} : x \mapsto 1$;
(f) $f :]0,\pi[\to \mathbb{R} : x \mapsto (\cos x)^2$;
(g) $f :]0,2[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

(6.19) *Exercício.* Considerem uma função f ímpar e de período 2ℓ, satisfazendo $f(x+\ell) = -f(x)$. Mostrem que na sua série de senos em relação ao intervalo $[-\ell,\ell]$ só aparecem coeficientes de índice ímpar, ou seja, $b_n = 0$ quando n é par. (Façam uma mudança de variável $x \mapsto x+\ell$ no integral e depois usem propriedades de f e do seno.)

(6.20) SÉRIES DE COSSENOS. Da mesma forma, por vezes é útil ter uma série só com cossenos para uma função f originalmente definida em $[0,\ell]$. Como vimos no exercício (6.16), uma tal série corresponde a uma função par. Assim, fazemos um *prolongamento par* de f a $[-\ell,\ell]$ e calculamos a série de Fourier (para uma função de período 2ℓ) em relação ao novo intervalo, $[-\ell,\ell]$. De acordo com esse exercício, a série tem apenas cossenos; daí chamarmos-lhe uma *série de cossenos*. (Notem que uma série de cossenos pode incluir o termo constante, que corresponde ao cosseno com $n = 0$.)

Considerem de novo a função f do exemplo (6.13) definida por $f(x) = x$ no intervalo $]0,1[$ e de período 1. Esta função não é par. Porém, se só estivermos interessados no que se passa no intervalo $]0,1[$, podemos usar o prolongamento par $g : x \mapsto |x|$ ao intervalo $]-1,1[$ e depois prolongar periodicamente, com período 2. Esta função é par, e portanto a sua série de Fourier em relação ao intervalo $[-1,1]$ é uma série de cossenos.

(6.21) *Exercício.* Calculem a série de Fourier de g em relação ao intervalo $[-1,1]$ e confirmem que é realmente a série de cossenos para f.

(6.22) *Exercício.* Considerem agora a função de período 2 definida por $f(x) = x$ no intervalo $]0,2[$. Determinem a série de Fourier, a série de senos, e a série de cossenos dessa função. Comparem com as séries dos exemplos (6.13) e (6.14) e do exercício anterior.

(6.23) *Exercício.* Calculem as séries de cossenos destas funções:
(a) $f :]0,\pi[\to \mathbb{R} : x \mapsto 1$;
(b) $f :]0,\pi[\to \mathbb{R} : x \mapsto \cos x$;
(c) $f :]0,\pi[\to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(2x)$;

(d) $f :]0,\pi[\to \mathbb{R} : x \mapsto (\cos x)^2$;
(e) $f :]0,\pi[\to \mathbb{R} : x \mapsto (\sin x)^2$;
(f) $f :]0,\pi[\to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(3x)$.

(6.24) *Exercício.* Considerem uma função f par e de período 2ℓ, satisfazendo $f(x+\ell) = -f(x)$. Mostrem que na sua série de cossenos em relação ao intervalo $[-\ell,\ell]$ só aparecem coeficientes de índice ímpar (atenção: ímpar!), ou seja, $a_n = 0$ quando n é par.

(6.25) Valor de uma série de Fourier num ponto. Uma pergunta natural é: a função obtida a partir da série de Fourier coincide com a função original f?

Se f for C^∞, sim (mas não vamos tentar demonstrá-lo). De contrário, é preciso algumas precauções. Para as funções que temos usado (limitadas, periódicas, seccionalmente C^∞) e nos pontos onde f é contínua, a soma da série coincide com o valor de f. O valor da série num ponto de descontinuidade de f é a média dos limites (à esquerda e à direita) de f nesse ponto. (É tradicional exigir apenas que a função seja seccionalmente C^1, mas nos exemplos que vamos explorar isso não acrescenta nada.)

Ilustramos com a função f do exemplo (6.14): uma função de período 2, definida em $]-1,1[$ por $f(x) = x$, e com série de Fourier

$$\sum_{n>0} -2\frac{(-1)^n}{\pi n}\sin(\pi n x).$$

Em pontos no interior do intervalo $[-1,1]$, a função original é C^∞, por isso a soma coincide com o valor da função. Por exemplo, em $x = \frac{1}{2}$, ficamos com

$$f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} = \sum_{n>0} -2\frac{(-1)^n}{\pi n}\sin(\pi n \tfrac{1}{2}).$$

Se n for par, o seno é 0. Se n for ímpar, temos $n = 2k+1$ (com $k \geq 0$), e então

$$\tfrac{1}{2} = \sum_{k\geq 0} -2\frac{(-1)^{2k+1}}{\pi(2k+1)}\sin(\pi\tfrac{2k+1}{2}) = \sum_{k\geq 0}\frac{2}{\pi(2k+1)}\sin(k\pi + \tfrac{\pi}{2}) = \sum_{k\geq 0}\frac{2}{\pi(2k+1)}(-1)^k.$$

Desta forma, multiplicando tudo por $\frac{\pi}{2}$, obtemos

$$\tfrac{\pi}{4} = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

(6.26) Para perceber o que se passa num ponto de descontinuidade, voltemos ao exemplo (6.13): uma função f de período 1 definida em $]0,1[$ por $f(x) = x$, e com série de Fourier

$$\tfrac{1}{2} - \sum_{n>0}\frac{\sin(2\pi n x)}{\pi n}.$$

Esta função tem descontinuidades nos inteiros (porquê? consultem o gráfico). Como a função é periódica, basta avaliarmos o que se passa em $x = 0$ (pois nos outros inteiros será igual). Reparem agora que o valor da série em $x = 0$ é a média do limite à esquerda $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e do limite à direita $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(6.27) *Exercício**. Mantemos a função f do parágrafo anterior e consideramos uma função g de período 1, limitada, e seccionalmente C^∞. Suponham que $\lim_{x\to 0^-} g(x) = a$ e $\lim_{x\to 0^+} g(x) = b$, com $a \neq b$. Definam $h : x \mapsto g(x) + (b-a) f(x)$ em $x \notin \mathbb{Z}$.

(a) Determinem $\lim_{x\to 0^-} h(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} h(x)$, e mostrem que é possível prolongar h a $x = 0$ por continuidade. Qual o valor em $x = 0$ da função prolongada?

(b) Qual a soma da série de $h(x)$ em $x = 0$? Qual a soma da série de $(b-a) f(x)$ em $x = 0$? Qual é então o valor da soma da série de $g(x)$ em $x = 0$?

(c) Conseguem generalizar esta conclusão para outros pontos de descontinuidade (além de $x = 0$)? E para outros intervalos (além de $[0,1]$)?

(6.28) *Exercício.* Considerem a função de período 1 definida em $]0,1[$ por $h(x) = x^2$.

(a) Determinem a série de Fourier de $h(x)$.

(b) Substituindo $x = \frac{1}{2}$, determinem o valor de $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$.

(c) Substituindo $x = 1$, determinem o valor de $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.

(6.29) *Exercício.* Considerem agora a função de período 1 definida em $]0,1[$ por $h(x) = x^4$.

(a) Determinem a série de Fourier de $h(x)$.

(b) Substituindo $x = \frac{1}{2}$, determinem o valor de $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^4}$.

(c) Substituindo $x = 1$, determinem o valor de $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$.

(6.30) RESPOSTAS DE EXERCÍCIOS.

(6.7) $\sqrt{2\pi}$.

(6.9) $-n^2$.

(6.11) $\sqrt{\pi}$; $\sqrt{\pi}$; $\sqrt{2\pi}$.

(6.18) (a) $\sin x$. (b) $\sin(2x)$.
(c) $\sum_{\substack{n>1 \\ n \text{ par}}} \frac{4n/\pi}{n^2-1} \sin(nx)$. (d) $\sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ ímpar}}} \frac{4n/\pi}{n^2-4} \sin(nx)$.
(e) $\sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ ímpar}}} \frac{4}{\pi n} \sin(nx)$. (f) $\sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ ímpar}}} \frac{4(n^2-2)}{\pi(n^3-4n)} \sin(nx)$.
(g) $\sum_{n>0} -\frac{16+8(\pi^2 n^2-2)(-1)^n}{\pi^3 n^3} \sin \frac{\pi n x}{2}$.

(6.21) $\frac{1}{2} - \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ ímpar}}} \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos(\pi n x)$.

(6.22) $1 - \sum_{n>0} \frac{2}{\pi n} \sin(\pi n x)$;
$-\sum_{n>0} \frac{4(-1)^n}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2}$; $1 - \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ ímpar}}} \frac{8}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{2}$.

(6.23) (a) 1. (b) $\cos x$. (c) $\cos(2x)$.
(d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$. (e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$. (f) $\cos(3x)$.

(6.27) (a) b. b. b. (b) b. $\frac{b-a}{2}$. $\frac{b+a}{2}$.

(6.28) (a)
$\frac{1}{3} + \sum_{n>0} \frac{1}{\pi^2 n^2} \cos(2\pi n x) - \sum_{n>0} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$.
(b) $-\frac{\pi^2}{12}$. (c) $\frac{\pi^2}{6}$.

(6.29) (a) $\frac{1}{5} + \sum_{n>0} \left(\frac{2}{\pi^2 n^2} - \frac{3}{\pi^4 n^4}\right) \cos(2\pi n x) + \sum_{n>0} \left(\frac{3}{\pi^3 n^3} - \frac{1}{\pi n}\right) \sin(2\pi n x)$. (b) $-\frac{7\pi^4}{6!}$. (c) $\frac{\pi^4}{90}$.

EPISÓDIO 7

ALGUMAS EDPs

Neste episódio, resolvemos alguns exemplos de *equações diferenciais parciais*, ou seja, equações que envolvem derivadas parciais.

Começamos com alguns exemplos de equações de primeira ordem. Imaginem que têm uma função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x, y \mapsto u(x, y)$ e que $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ é um caminho em $\mathbb{R}^2$. Abusando um pouco a notação, escrevemos $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Omitindo t sempre que não haja risco de confusão, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(u(\gamma(t))\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(u(x, y)\Big) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Isto sugere que, se tivermos uma equação

$$a(x, y) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + b(x, y) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = f(x, y),$$

procuremos, usando as técnicas do episódio 3, uma solução para

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(x, y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = b(x, y)$$

e construamos com ela um caminho $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ (uma *curva característica*). Substituindo esse caminho na equação, ficamos com

$$\underbrace{a(x(t), y(t))}_{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) + \underbrace{b(x(t), y(t))}_{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t)) = f(x(t), y(t)),$$

ou seja, tendo em conta o que vimos acima,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(u(\gamma(t))\Big) = f(x(t), y(t)).$$

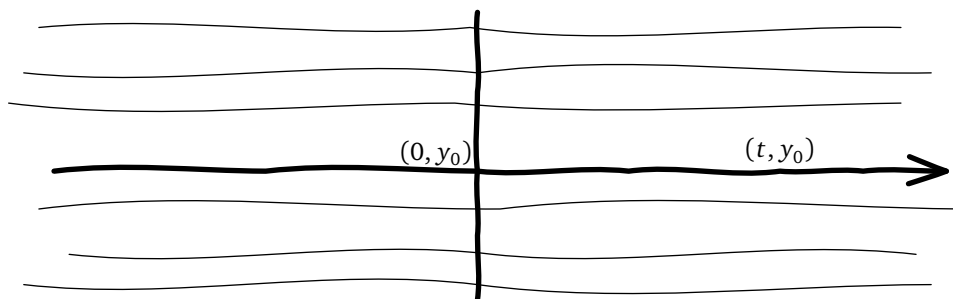
Esta é uma equação de primeira ordem, apenas na variável t, que podemos resolver com as técnicas do episódio 1. Se conhecermos o valor de u num ponto do caminho, podemos usá-lo como condição inicial e obter os valores de u ao longo de γ, desde que a equação tenha uma solução única, e desde que não haja outros caminhos a cruzar-se com este e que indiquem valores diferentes (usamos as ideias do episódio 2 para esclarecer estes detalhes).

Também veremos exemplos de equações de segunda ordem. Para estas, as técnicas do episódio 6 permitem-nos escrever a função procurada como uma série de senos ou de cossenos (conforme os casos), e a partir da EDP obter equações de ordem superior para os coeficientes da série, equações essas que resolveremos como no episódio 4 ou no 5.

(7.1) O método das características. Considerem a equação

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -yu, \qquad u(0, y) = y^2.$$

(Neste e nos próximos exemplos e exercícios, vamos trabalhar com funções $u(x, y)$.) Dependendo do contexto, à segunda condição chamamos *condição de fronteira* (quando vemos x como variável espacial) ou *condição inicial* (quando vemos x como variável temporal, ou a condição como condição inicial de uma EDO).

Como a equação não envolve derivadas parciais em relação a y, podemos tratar y como constante e observar que nesse caso $\frac{\partial u}{\partial x} = -yu$ implica $u = C\, e^{-yx}$ (ainda se lembram como resolver estas equações?), onde C é uma constante em relação a x mas pode depender de y. Como nos é dito que $u(0, y) = y^2$, substituímos $x = 0$ em $u(x, y) = C\, e^{-yx}$ e obtemos $u(0, y) = C$. Concluímos assim que $C = y^2$ e que $u(x, y) = C\, e^{-yx} = y^2\, e^{-xy}$.

Vejamos isto à luz do que dissemos há pouco sobre as curvas características. Se escolhermos uma variável independente t e escrevermos $x(t) = t$ e $y(t) = y_0$, onde y_0 é constante, ficamos com $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1$ e $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$. Dessa forma,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(u(x(t), y(t))\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(u(t, y_0)\Big) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$$

é o lado esquerdo da equação. Se escrevermos $g(t) = u(x(t), y(t))$, constatamos que

$$g'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(u(x(t), y(t))\Big) = \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) = -y(t) \cdot u(x(t), y(t)) = -y_0\, g(t).$$

Isto é, $g'(t) = -y_0\, g(t)$. A condição inicial desta EDO é $g(0) = u(0, y_0) = y_0^2$. Ora, a solução dessa equação com essa condição inicial é $g(t) = y_0^2\, e^{-y_0 t}$ (verifiquem). Portanto $u(t, y_0) = g(t) = y_0^2\, e^{-y_0 t}$. Em $x = t$ e $y = y_0$, temos $u(x, y) = y^2\, e^{-xy}$.

(7.2) Vejamos outro exemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u \cdot \cos x + e^{\sin x}\, y, \qquad u(0, y) = e^y.$$

Também aqui, usamos as características $x(t) = t$ e $y(t) = y_0$.

Em vez de usar $g(t) = u(x(t), y(t))$ como acima, vamos simplesmente escrever u (que será $u(x, y)$ ou $u(x(t), y(t))$ conforme os contextos) e usar $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ (quando estejamos a referir-nos às derivadas de $x, y \mapsto u(x, y)$) ou $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (quando estejamos a referir-nos à derivada

de $t \mapsto u(x(t), y(t))$, ou seja, a $g'(t)$). Isto permite-nos aliviar a notação substancialmente, sem trazer riscos sérios de confusão. Temos assim

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

e portanto, substituindo $x = t$ e $y = y_0$, a equação original é equivalente a

$$u' = u \cdot \cos t + e^{\sin t}\, y_0, \qquad u(0, y_0) = e^{y_0},$$

onde $u' = u'(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ e y_0 é uma constante. Esta equação é linear e podemos resolvê-la como em (1.22). Escolhendo $\mu(t) = e^{-\sin t}$ como fator integrante, obtemos consecutivamente

$$e^{-\sin t}\, u' - \cos t \cdot e^{-\sin t}\, u = y_0 \quad \Rightarrow \quad \left(e^{-\sin t}\, u\right)' = y_0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\sin t}\, u = y_0\, t + C,$$

onde C é uma constante (em relação a t). Desta forma, $u = y_0\, t e^{\sin t} + C e^{\sin t}$. Como $x(0) = 0$ e $y(0) = y_0$, se substituirmos $t = 0$ nessa fórmula obtemos $u(0, y_0) = C$ (verifiquem!). Comparando com a condição inicial $u(0, y_0) = e^{y_0}$, concluímos que $C = e^{y_0}$. Portanto,

$$u(x(t), y(t)) = u(t, y_0) = y_0\, t e^{\sin t} + e^{y_0 + \sin t}.$$

Em $x = t$ e $y = y_0$, temos $u(x, y) = xy e^{\sin x} + e^{y + \sin x}$.

(7.3) Nada obriga a que a condição inicial seja dada em pontos da forma $(0, y_0)$. Vejamos o que se passa com

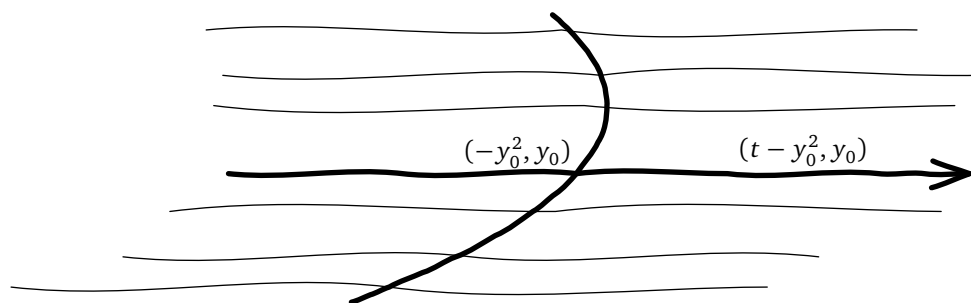
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \sin(2y), \qquad u(-y^2, y) = -y^2 \sin(2y).$$

Como queremos que $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$ seja $\frac{\partial u}{\partial x}$, escolhemos $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1$ e $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$. Isto leva-nos a $x(t) = x_0 + t$ e $y(t) = y_0$. A equação original fica

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1 + \sin(2y_0), \qquad u(-y_0^2, y_0) = -y_0^2 \sin(2y_0).$$

Como a condição inicial é dada em pontos da forma $(-y_0^2, y_0)$, vamos escolher $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) = (-y_0^2, y_0)$, ou seja, $x(t) = t - y_0^2$. Desta forma, em $t = 0$ ficamos com

$$u(x(0), y(0)) = u(x_0, y_0) = u(-y_0^2, y_0^2) = -y_0^2 \sin(2y_0).$$

A solução de $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1 + \sin(2y_0)$ é $u = t + t\sin(2y_0) + C$, onde C é constante em relação a t (mas pode depender de y_0). Para determinar o valor de C, substituímos $t = 0$ na

expressão que acabámos de encontrar para u, obtendo $u(x(0),y(0)) = u(x_0,y_0) = C$. Como a condição inicial era $u(x_0,y_0) = -y_0^2\sin(2y_0)$, concluímos que $C = -y_0^2\sin(2y_0)$ e que $u = t + t\sin(2y_0) - y_0^2\sin(2y_0) = t + (t - y_0^2)\sin(2y_0)$.

Mas queremos escrever u só em termos de x e y (isto é, sem usar t ou y_0). Recordemos as parametrizações $x(t) = t - y_0^2$ e $y(t) = y_0$. Se as resolvermos em ordem a t e y_0 obtemos $y_0 = y$ e $t = x + y_0^2 = x + y^2$. Dessa forma,

$$u(x,y) = t + (t - y_0^2)\sin(2y_0) = x + y^2 + x\sin(2y).$$

(7.4) *Exercício.* Encontrem a solução $u(x,y)$ de cada uma destas equações.

(a) $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - \sin x, \quad u(0,y) = 2;$

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x} + 2x, \quad u(0,y) = 1 + y;$

(c) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2u + \cos y, \quad u(0,y) = \cos y;$

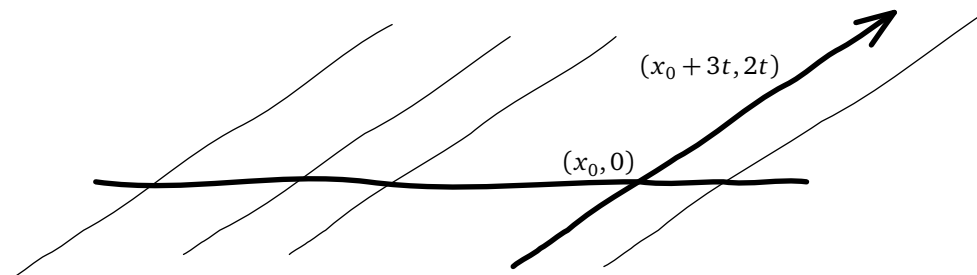
(d) $\frac{\partial u}{\partial x} = 8x - y, \quad u(x,x) = 4x^2;$

(e) $y\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + 3y, \quad u(0,y) = 1/y$ (com $y > 0$);

(f) $2\sqrt{x}\,\frac{\partial u}{\partial x} = y\sin\sqrt{x}, \quad u(\pi^2,y) = y.$

(7.5) Consideremos agora

$$3\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = u + ye^{y/2}, \qquad u(x,0) = x.$$

Neste caso, queremos que $\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$ seja $3\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}$, pelo que precisamos de $\frac{dx}{dt} = 3$ e $\frac{dy}{dt} = 2$. Além disso, queremos que o ponto inicial $(x(0),y(0))$ seja da forma $(x_0,0)$. Para tal, escolhemos $x(t) = x_0 + 3t$ e $y(t) = 2t$.

Usando estas curvas características e tendo em conta que $\frac{du}{dt} = 3\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}$ e que $y = 2t$, a equação original pode ser expressa assim:

$$\frac{du}{dt} = u + 2te^t, \qquad u(x_0,0) = x_0.$$

Esta equação é linear e e^{-t} é um fator integrante. Resolvendo-a, obtemos $u = t^2e^t + Ce^t$. Em $t = 0$, temos $u(x(0),y(0)) = C$. Pela condição inicial, $u(x(0),y(0)) = u(x_0,0) = x_0$, logo $C = x_0$. Substituindo este valor, obtemos $u = t^2e^t + x_0e^t = e^t(t^2 + x_0)$.

Falta-nos exprimir u apenas em termos de x e y. Resolvendo $x = x_0 + 3t$ e $y = 2t$ em ordem a t e a x_0, vemos que $t = \frac{1}{2}y$ e que $x_0 = x - 3t = x - \frac{3}{2}y$. Assim,

$$u(x,y) = e^t(x_0 + t^2) = e^{y/2}\left(x - \tfrac{3}{2}y + \tfrac{1}{4}y^2\right).$$

(7.6) *Exercício.* Determinem as soluções $u(x, y)$ da equação

$$3\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u), \qquad u(x, 0) = x,$$

onde f é cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x, y, u) = y$; (b) $f(x, y, u) = 4u$; (c) $f(x, y, u) = uy$; (d) $f(x, y, u) = x - y^2$.

(7.7) Se as curvas características forem parametrizadas por $x(t) = t + x_0$ e por soluções $y(x)$ de equações $y' = F(x, y)$ em ordem a x, teremos $\frac{dx}{dt} = 1$ e $\frac{dy}{dt} = F(x, y)$. Assim,

$$\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + F(x, y) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Por exemplo, para a equação

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} = e^x + y + u, \qquad u(0, y) = y.$$

Para as características serem soluções de $\frac{dx}{dt} = 1$ e $\frac{dy}{dt} = -2y$ passando por pontos da forma $(0, y)$, escolhemos $x(t) = t$ e $y(t) = e^{-2t} y_0$. (De onde vem este $y(t)$?) Escrevendo t e y_0 em ordem a x e y, temos também $t = x$ e $y_0 = e^{2t} y = e^{2x} y$.

Já a equação diferencial fica

$$\frac{du}{dt} = e^x + y + u = e^t + e^{-2t} y_0 + u, \qquad u(0, y_0) = y_0.$$

A equação é linear, e usando o fator integrante e^{-t} obtemos $e^{-t} u = t - \frac{1}{3}e^{-3t} y_0 + C$. Substituindo em $t = 0$ e usando a condição inicial, obtemos $u(0, y_0) = -\frac{1}{3}y_0 + C = y_0$. Logo, $C = \frac{4}{3}y_0$. Resolvendo em ordem a u, e depois substituindo as expressões para t e y_0 em ordem a x e y, chegamos então a

$$u = te^t - \tfrac{1}{3}e^{-2t} y_0 + Ce^t = te^t - \tfrac{1}{3}y_0 e^{-2t} + \tfrac{4}{3}y_0 e^t = xe^x - \tfrac{1}{3}y + \tfrac{4}{3}ye^{3x}.$$

(Veem o que aconteceu nesta última passagem?)

(7.8) *Exercício.* Encontrem as soluções $u(x, y)$ das seguintes equações.

(a) $\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 2x - 2y$, $\quad u(0, y) = 1 + 2y$;

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} = y - 2xy$, $\quad u(0, y) = y$;

(c) $\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = y$, $\quad u(0, y) = 0$;

(d) $\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$, $\quad u(0, y) = 1$;

(e) $\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 2ux$, $\quad u(0, y) = e^y$;

(f) $\frac{\partial u}{\partial x} + \cos x\,\frac{\partial u}{\partial y} = x - \cos x$, $\quad u(0, y) = y$;

(g) $\frac{\partial u}{\partial x} + \cos x\,\frac{\partial u}{\partial y} = 1$, $\quad u(0, y) = y^2$;

(h) $\frac{\partial u}{\partial x} + \cos x\,\frac{\partial u}{\partial y} = u$, $\quad u(0, y) = -2y$;

(i) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2xy}{1+x^2}\frac{\partial u}{\partial y} = \cos x$, $\quad u(0, y) = \cos y$.

(7.9) *Exercício*★. Vamos identificar condições nas quais a equação

$$\frac{\partial u}{\partial x} + F(x,y) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,u)$$

(com alguma condição inicial) tem solução única $u : \Omega \to \mathbb{R} : x, y \mapsto u(x,y)$, onde Ω é um aberto conexo por arcos. (Não vamos tentar determinar se a função u assim obtida é diferenciável.) Em cada alínea, mantemos as hipóteses das alíneas anteriores.

(a) Suponham que F é contínua em Ω e localmente Lipschitz em relação a y. Mostrem que, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, há exatamente uma solução de

$$\begin{cases} x'(t) = 1, \\ y'(t) = F(x(t), y(t)), \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

com todos os seus pontos em Ω e que não pode ser prolongada para um intervalo maior sem sair de Ω.

(b) Mostrem que se duas curvas como as das alínea anterior (mas com pontos iniciais distintos) se intersetam, então são a mesma curva (mas com uma parametrização diferente).

(c) Suponham que f é contínua, e localmente Lipschitz em relação a u. Dada uma curva $(x(t), y(t))$ como na alínea (a), mostrem que a equação correspondente

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(x(t), y(t), u)$$

tem uma única solução para cada valor inicial $u(x_0, y_0)$.

(d) Queremos especificar condições de fronteira ao longo de um curva em Ω. O que é preciso exigir dessa curva para garantir que as curvas características não se intersetam?

(e) O que é preciso exigir do conjunto Ω para garantir que cada ponto de Ω está nalguma curva característica? Nessas condições, como obter o valor de u em cada ponto de Ω?

(7.10) Também podemos ter situações em que nenhum dos coeficientes é constante. Vejamos o que se passa com

$$(x+y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} = x + 2xy + 3y^2, \qquad u(x,1) = 2x.$$

Como queremos que $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = (x+y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y}$ e que cada característica passe por um ponto da forma $(x_0, 1)$, procuramos soluções de

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = \phantom{x +{}} y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial, como fizemos no episódio 3, temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cuja solução (usando a exponencial da forma de Jordan) é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t x_0 + te^t \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Tendo em conta que $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (x+y)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$, a equação original fica agora

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (e^t x_0 + te^t) + 2(e^t x_0 + te^t)e^t + 3e^{2t}, \qquad u(x_0,1) = 2x_0.$$

Integrando por partes, obtemos $u = e^t x_0 + te^t - e^t + e^{2t} x_0 + te^{2t} + e^{2t} + C$. Substituindo $t = 0$ e usando a condição inicial $u(x_0,1) = 2x_0$, obtemos ainda $2x_0 = 2x_0 + C$, ou seja, $C = 0$. Concluímos assim que $u = e^t x_0 + te^t - e^t + e^{2t} x_0 + te^{2t} + e^{2t} = x - y + xy + y^2$ (de onde vem a última igualdade?).

(7.11) *Exercício.* Considerem

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u, \qquad u(x,-1) = x.$$

(a) Determinem a parametrização da curva característica com $x(0) = x_0$ e $y(0) = -1$. Qual o maior intervalo onde a parametrização está definida?

(b) Que pontos estão em alguma dessas curvas? As curvas intersetam-se?

(c) Determinem u no maior conjunto possível.

(7.12) *Exercício.* Considerem agora

$$-y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y)$$

com condição inicial $u(x,0) = 0$ válida em $x > 0$.

(a) Determinem a parametrização da curva característica com $x(0) = x_0$ e $y(0) = 0$, para $x_0 > 0$. Qual o maior intervalo onde a parametrização está definida?

(b) Supondo que $f(x,y) = x^2 - y^2$, determinem u em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(c) Supondo agora que $f(x,y) = 1$, determinem u em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leq 0\}$. É possível estender u a mais pontos?

(7.13) A equação de continuidade. Dizer que uma certa quantidade é conservada, é dizer que, para cada região V,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \text{densidade} = -\iint_{\partial V} \text{fluxo através da fronteira}$$

(∂V é o bordo de V). Se chamarmos ρ à densidade (da quantidade em causa), e usarmos a regra de Leibniz (para trocar a derivada para dentro do integral), o lado esquerdo dessa equação fica

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \text{densidade} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Se chamarmos $\mathbf{F}$ ao vetor que descreve a direcção de movimento (e quantidade de material movimentado) em cada ponto, e $\mathbf{N}$ ao vetor normal a ∂V apontando para fora da região, e depois usarmos o teorema da divergência, o lado direito da fórmula inicial fica

$$-\iint_{\partial V} \text{fluxo através da fronteira} = -\iint_{\partial V} \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} = -\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}.$$

Ora, se duas funções contínuas têm sempre os mesmos integrais, independentemente da região de integração V, é porque são necessariamente iguais. Obtemos portanto a chamada *equação de continuidade*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{F}.$$

(Notem que aqui estamos a usar a divergência de forma ligeiramente diferente do habitual, incluindo apenas derivadas em relação às variáveis espaciais.)

(7.14) A equação do calor pode ser obtida a partir da equação de continuidade, se aceitarmos algumas hipóteses (com cuja justificação—e condições de validade—não nos vamos preocupar). O nosso objetivo é encontrar uma equação diferencial para a temperatura $u(t,x,y,z)$ em cada ponto (x,y,z) de um objeto e em cada instante t. A equação, é claro, só se aplicará no interior do objeto; teremos de especificar (de alguma outra forma) o que se passa na fronteira do objeto.

Como a energia é conservada, usamos a correspondente equação da continuidade. Para isso, assumimos que a densidade de energia (térmica) em cada ponto é proporcional à temperatura (absoluta) nesse ponto (ou seja, $\rho = au$, para alguma constante $a > 0$) e que o fluxo de energia é proporcional ao gradiente da temperatura, mas no sentido oposto (ou seja, $\mathbf{F} = -b \operatorname{grad} u$, para alguma constante $b > 0$). Combinando tudo, a equação da continuidade fica

$$a\frac{\partial u}{\partial t} = b \operatorname{div} \operatorname{grad} u = b\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big).$$

Para nós, os valores de a e b são irrelevantes, e por isso combinamo-los no mesmo lado da equação. Vamos considerar apenas o caso unidimensional. (Como usamos apenas derivadas, não precisamos que u seja a temperatura *absoluta*.) Obtemos portanto

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Mas como resolvemos uma equação deste género?

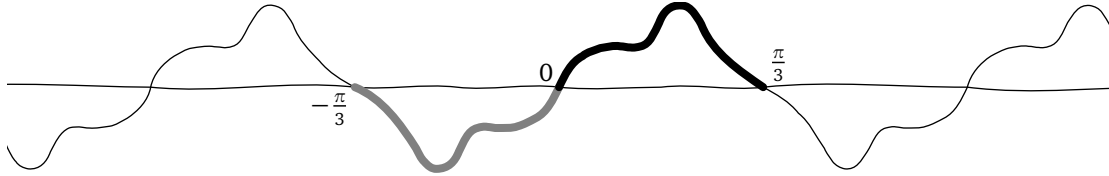
(7.15) Resolução de EDPs usando séries de Fourier. Queremos encontrar a função $u(t,x)$ com domínio $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ satisfazendo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 17u, \qquad u(t,0) = u(t,\tfrac{\pi}{3}) = 0, \qquad u(0,x) = 4\sin(3x) - 7\sin(6x).$$

(Às condições no centro chamamos as *condições de fronteira*, à última condição chamamos a *condição inicial*. Para evitar ter de definir as derivadas parciais na fronteira, trabalhamos apenas com funções definidas numa vizinhança do domínio.)

Vamos usar a seguinte estratégia: fixando o valor de t, queremos que a função $f(x) = u(t,x)$ satisfaça $f(0) = u(t,0) = 0$ e $f(\frac{\pi}{3}) = u(t,\frac{\pi}{3}) = 0$. Como vamos precisar de calcular a derivada $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, convém que f seja diferenciável (sem saltos nem cantos). Podemos começar por fazer um prolongamento ímpar de f ao intervalo $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ (como $f(0) = 0$, isto assegura que f seja diferenciável em $x = 0$). Se fizermos um prolongamento periódico

(de período $\frac{2\pi}{3}$), também asseguramos que f é diferenciável em $x = \frac{\pi}{3}$. Desta forma, f é uma função ímpar de período $\frac{2\pi}{3}$, pelo que tem uma série de senos com o seguinte formato:

$$f(x) = \sum_{k>0} b_k \sin \frac{2\pi k x}{2\pi/3} = \sum_{k>0} b_k \sin(3kx).$$

Mas é importante notar que este raciocínio se aplica independentemente para cada t. Desta forma, os coeficientes podem perfeitamente depender de t. Ou seja, estamos a lidar com uma solução da forma

$$u(t,x) = \sum_{k>0} b_k(t) \sin(3kx).$$

Para encontrar os $b_k(t)$, calculamos as derivadas parciais desta série (vamos admitir, sem justificar, que isto é válido) e substituímo-las na equação original. Como

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{k>0} b_k'(t) \sin(3kx), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \sum_{k>0} b_k(t)(-3^2k^2) \sin(3kx)$$

(porquê?), a equação original fica

$$\sum_{k>0} b_k'(t) \sin(3kx) = 4 \sum_{k>0} b_k(t)(-3^2k^2) \sin(3kx) - 17 \sum_{k>0} b_k(t) \sin(3kx).$$

Recordando que os senos formam uma base para as funções que estamos a considerar (funções ímpares de período $\frac{2\pi}{3}$), reconhecemos que os seus coeficientes não se misturam. Por isso, para cada $k > 0$, temos

$$b_k'(t) = -4 \cdot 3^2\, k^2\, b_k(t) - 17 b_k(t) = (-36k^2 - 17)\, b_k(t).$$

Podíamos usar aniquiladores para resolver esta equação, mas este caso é tão simples que sabemos imediatamente que a solução é $b_k(t) = e^{(-36k^2-17)\,t}\, b_k(0)$. Assim, a solução da equação original é

$$u(t,x) = \sum_{k>0} e^{(-36k^2-17)\,t}\, b_k(0) \sin(3kx).$$

Para determinar os valores de $b_k(0)$, substituímos $t = 0$ na solução geral, obtendo

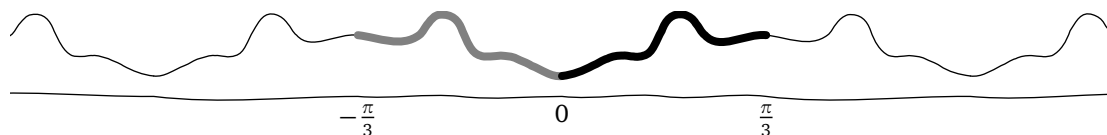
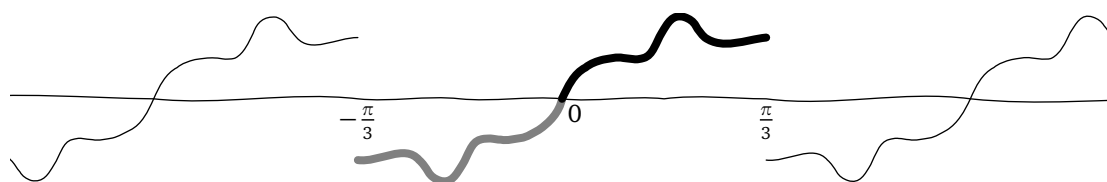
$$u(0,x) = \sum_{k>0} b_k(0) \sin(3kx).$$

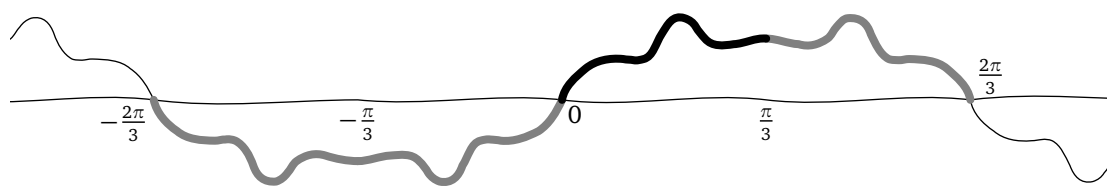
Neste ponto, pode acontecer uma de duas coisas: ou a condição inicial já vem expressa neste tipo de série (caso em que lemos os coeficientes diretamente), ou não vem (caso em que temos de calcular os coeficientes da condição inicial—prolongada da mesma forma que os $u(t,x)$—numa série deste tipo, usando os produtos internos).

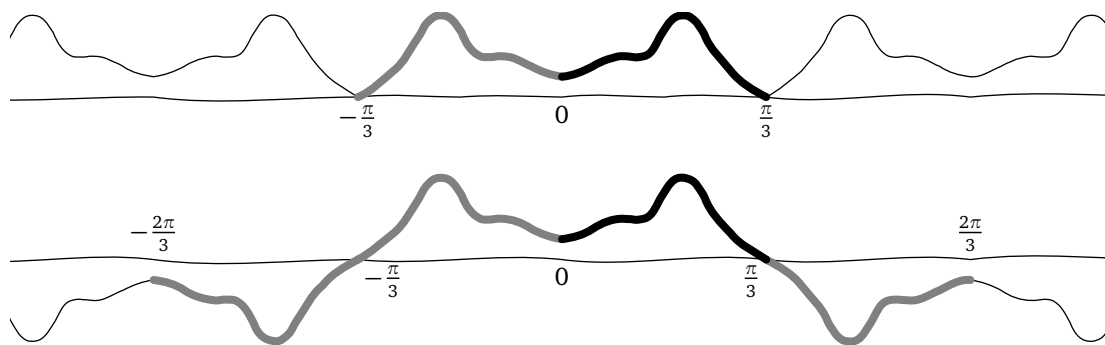
No nosso caso, a condição inicial $u(0,x) = 4\sin(3x) - 7\sin(6x)$ já vinha expressa como uma série do tipo procurado. Assim, podemos ler diretamente que $b_1(0) = 4$, $b_2(0) = -7$, e que nenhum outro k ocorre. Ou seja, a solução final da nossa equação é

$$u(0,x) = 4e^{(-36-17)\,t} \sin(3x) - 7e^{(-36\cdot 2^2-17)\,t} \sin(6x).$$

(7.16) Se as condições de fronteira fossem $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\frac{\pi}{3}) = 0$ e, como antes, $f(x) = u(t,x)$ para algum t fixo, então o prolongamento compatível seria um prolongamento par. Assim, teria uma série de cossenos

$$f(x) = u(t,x) = \sum_{k\geq 0} a_k(t)\cos(3kx).$$

(7.17) Se as condições de fronteira fossem $u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\frac{\pi}{3}) = 0$ e, como antes, $f(x) = u(t,x)$ para algum t fixo, então o prolongamento compatível seria um prolongamento ímpar (para evitar ter um canto em $f(0) = 0$). Porém, não podemos fazer um prolongamento de período $\frac{2\pi}{3}$, pois corremos o risco de ter saltos no outro extremo do intervalo.

Para evitar este problema, fazemos um novo prolongamento, até ao intervalo $[-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$, e depois consideramos uma função de período $\frac{4\pi}{3}$. Dessa forma, a série fica

$$f(x) = u(t,x) = \sum_{k>0} b_k(t)\sin\frac{2\pi kx}{4\pi/3} = \sum_{k>0} b_k(t)\sin\frac{3kx}{2}.$$

(7.18) *Exercício.* Como ilustrado na figura, a função f tem a seguinte simetria: $f(x+\frac{2\pi}{3}) = -f(x)$. Usando o exercício (6.19), mostrem que $b_k(t) = 0$ se k é par. Verifiquem que o mesmo se passa independentemente do comprimento do intervalo original. Concluam que para este tipo de prolongamento a série de senos inclui apenas k ímpar.

(7.19) Se as condições de fronteira fossem $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,\frac{\pi}{3}) = 0$ e, como antes, $f(x) = u(t,x)$ para algum t fixo, então o prolongamento compatível seria um prolongamento par (para evitar ter um salto em $f(0) = 0$). Tal como para o caso anterior, não podemos fazer um prolongamento de período $\frac{2\pi}{3}$, desta vez porque corremos o risco de ter cantos no outro extremo do intervalo. Fazemos então um novo prolongamento a $[-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$ e depois

consideramos uma função de período $\frac{4\pi}{3}$. Seguindo um raciocínio semelhante ao de antes, chegamos a

$$f(x) = u(t,x) = \sum_{\substack{k>0 \\ k \text{ ímpar}}} a_k(t) \cos\frac{3kx}{2}.$$

(7.20) *Exercício.* Para esta função, $f(x + \frac{2\pi}{3}) = -f(x)$. Usem o exercício (6.24) para mostrar que $a_k(t) = 0$ se k é par. Verifiquem que o mesmo se passa independentemente do comprimento do intervalo original. Concluam que para este tipo de prolongamento a série de cossenos inclui apenas k ímpar.

(7.21) *Exercício.* Considerem a EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5u,$$

onde $u(t,x)$ está definida para $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq 2\pi$. Encontrem a solução satisfazendo as condições de fronteira e inicial listadas em cada uma das alíneas (ou seja, cada alínea corresponde a uma solução distinta).

(a) $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = \sin x;$
(b) $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = 3\sin x + \sin(2x);$
(c) $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = \sin(x/2);$
(d) $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = \cos x;$
(e) $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = x;$
(f) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = 3\cos(2x);$
(g) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = \sin x;$
(h) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = x;$
(i) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = H_0(x) - H_1(x);$
(j) $u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = \sin(2x);$
(k) $u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = 3\sin(2x) - 5\cos(4x);$
(l) $u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = x;$
(m) $u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = 1;$
(n) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = 1;$
(o) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = \cos(2x) + 5\cos(4x);$
(p) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = \cos(3x).$

(7.22) *Exercício.* Consideramos agora uma variante com coeficientes não constantes:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = t^3\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5u,$$

com $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ e com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\frac{\pi}{2}) = 0$. Qual a solução geral, escrita como série de cossenos? Qual a solução com condição inicial $u(0,x) = \pi - e\cos(2x)$?

(7.23) *Exercício.* Quais as soluções, com domínio $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq 2\pi$ e com condições de fronteira $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0$ e condição inicial $u(0,x) = \sin\frac{x}{2}$, das seguintes equações?

(a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\sin t)\,u$; (b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{4}{t+3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2tu$; (c) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - \sin x$.

(7.24) A EQUAÇÃO DAS ONDAS aparece em contextos diferentes. Em dimensão (espacial) 1, com variáveis t e x, podemos pensar que u descreve o deslocamento (por exemplo, de pontos num material elástico) em relação à posição de equilíbrio, e que o momento é a quantidade conservada. Para um material de densidade constante, é razoável dizer que o momento é $a\frac{\partial u}{\partial t}$, onde $a > 0$ é uma constante, e aproximar a variação na distância entre pontos do material por $\frac{\partial u}{\partial x}$. Como a transferência de momento corresponde a uma força e a força elástica é proporcional à diferença entre essa distância e o seu valor de equilíbrio, escrevemos $F = -k\frac{\partial u}{\partial x}$, onde $k > 0$. Portanto, de acordo com a equação da continuidade (7.13), teríamos $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\,\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}$, onde $c^2 = \frac{k}{a}$ é uma constante positiva.

A forma adequada de modelar o problema em dimensão mais alta depende do próprio problema. Para os nossos fins, vamos simplesmente admitir que a nossa análise em dimensão 1 se mantenha válida ao longo de cada curva tangente a $\mathbf{F} = -k\,\mathrm{grad}\,u$, e que chegaríamos sempre a algo como (exemplificando em dimensão 3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,u = c^2\,\mathrm{lap}\,u = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Os próximos exercícios exploram variantes desta equação em dimensão 1 (ou 2, contando também a variável t). Como vamos ver, c pode ser vista como a velocidade das ondas.

(7.25) *Exercício.* Queremos encontrar a solução $u(t,x)$, com $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq \pi$, da EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3u$$

com condições de fronteira $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ e condições iniciais $u(0,x) = \sin x - 3\sin(2x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 4\sin(2x)$.

(a) Comecem por mostrar que a série adequada é $u(t,x) = \sum_{k>0} b_k(t)\,\sin(kx)$.

(b) Mostrem que a equação satisfeita por $b_k(t)$ é $(D^2 - 3 + k^2)\,b_k = 0$ (usando D para indicar a derivada em ordem a t).

(c) Para cada $k > 0$, determinem $b_k(0)$ e $b_k'(0)$. Em particular, decidam quais os valores de k que não são relevantes para o resto do problema.

(d) Para cada valor relevante de k, determinem a solução b_k da equação da alínea (b) com as condições iniciais indicadas na alínea (c). Notem que valores diferentes de k levam a tipos diferentes de solução.

(e) Juntem toda a informação das alíneas anteriores e obtenham uma expressão para a solução $u(t,x)$.

(7.26) *Exercício.* Encontrem a solução $u(t,x)$, com $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq \pi$, da EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4u$$

com condições de fronteira $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ e condições iniciais $u(0,x) = 2\sin(2x) - 3\sin(3x) + 4\sin(4x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 3\sin(2x)$.

(7.27) *Exercício.* Considerem a EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde $u(t,x)$ está definida para $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq 2\pi$. Em cada alínea, encontrem a solução satisfazendo as condições indicadas.

(a) $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = 3\sin x + \sin(2x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$;
(b) $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \sin(x/2)$;
(c) $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = 3\sin x + \sin(2x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \sin(x/2)$;
(d) $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$;
(e) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 3\cos(2x)$;
(f) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \pi$;
(g) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = x$;
(h) $u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = \sin(3x/4), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \frac{3}{4}\sin(x/4)$;
(i) $u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1$;
(j) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = -6\cos(x/4), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$;
(k) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = -6\cos(x/4)$;
(l) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,2\pi) = 0, \quad u(0,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = -6\cos(x/4)$.

(7.28) *Exercício.* Encontrem a solução $u(t,x)$, com $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, da EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\cos x\ \sin(2t),$$

com condições de fronteira $u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\frac{\pi}{2}) = 0$ e condições iniciais $u(0,x) = \sin(3x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 2\cos x$.

(7.29) *Exercício.* Encontrem a solução geral $u(t,x)$, com $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq 1$, da EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

($c > 0$ é uma constante) com condições de fronteira $u(t,0) = u(t,1) = 0$.

(a) Considerem primeiro condições iniciais da forma $u(0,x) = A\sin(\ell x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = B\sin(\ell x)$. Quais os valores razoáveis para ℓ?

(b) Fixem $u(0,x) = A\sin(\ell x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$. Qual a solução? Escrevam-na com base em $\sin(\ell ct + \ell x)$ e $\sin(\ell ct - \ell x)$. Qual diriam que é a velocidade dessas ondas?

(c) Fixem agora $u(0,x) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = B\sin(\ell x)$. Qual a solução? Escrevam-na com base em $\cos(\ell ct + \ell x)$ e $\cos(\ell ct - \ell x)$. Qual diriam que é a velocidade dessas ondas?

(d) Qual a solução geral da EDP, escrita em série de senos?

(7.30) *Exercício.* Considerem de novo uma solução $u(t,x)$ de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde $c > 0$ é uma constante. Vamos usar a mudança de variável $a = x - ct$ e $b = x + ct$.

(a) Escrevam t e x em função de a e b. Usem essas expressões para escrever u em função de a e b.

(b) Calculem $\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial u}{\partial a}$ e mostrem que é igual a 0. Concluam que $\frac{\partial u}{\partial a}$ é uma função apenas de a, e que $u = f(a) + g(b) = f(x - ct) + g(x + ct)$.

(c) Mostrem que se $u(t,0) = 0$ para todo o $t > 0$, então $g(x) = -f(-x)$. Mostrem que se $u(t,0) = u(t,\ell) = 0$ para todo o t, então f e g têm período 2ℓ. Conseguem encontrar outras propriedades de f e g quando u satisfaz os vários tipos de condições de fronteira?

(d) Se h for uma primitiva de $\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)$ com $h(0) = g(0) - f(0)$, mostrem que

$$f(x) = \frac{u(0,x) - h(x)}{2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{u(0,x) + h(x)}{2}.$$

(e) Concluam que

$$u(t,x) = \frac{u(0,x+ct) + u(0,x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \frac{\partial u}{\partial t}(0,s)\,ds.$$

(7.31) A EQUAÇÃO DE LAPLACE aparece frequentemente quando lidamos com potenciais de campos. Um caso típico é o campo eletrostático, em que, na ausência de carga, o potencial é uma função harmónica, ou seja, é uma solução de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Em duas variáveis, sabemos que a parte real e a imaginária de uma função holomorfa são harmónicas. Também podemos usar séries de Fourier para encontrar soluções.

Suponham que $u(x,y)$ define uma função harmónica em $0 \le x \le 2$ e $0 \le y \le 1$ e com condições de fronteira $u(x,0) = 0$, $u(x,1) = (e^{\pi} - e^{-\pi})\sin(\pi x)$, $u(0,y) = 3e^{\pi}\sin(\pi y)$, $u(2,y) = 3e^{-\pi}\sin(\pi y)$. Com os métodos que vimos até aqui, não é possível exprimir diretamente a solução de uma tal equação. Com efeito, o que sempre fizemos foi escolher a variável com um domínio limitado e escolhido o tipo de série com base nas condições de

fronteira relativas a essa variável. Ora, nenhuma destas condições de fronteira é compatível com as séries que vimos.

Felizmente, a equação de Laplace é linear, portanto podemos escrever $u = u_1 + u_2$, onde u_1 e u_2 também satisfazem a equação de Laplace, mas cada uma delas tem as condições de fronteira relativas a uma variável. Por exemplo, para u_1 impomos $u_1(x,0) = 0$, $u_1(x,1) = (e^{\pi} - e^{-\pi})\sin(\pi x)$, e $u_1(0,y) = u_1(2,y) = 0$, enquanto para u_2 impomos $u_2(x,0) = u_2(x,1) = 0$, $u_2(0,y) = 3e^{\pi}\sin(\pi y)$, e $u_2(2,y) = 3e^{-\pi}\sin(\pi y)$.

(7.32) *Exercício.* Vamos determinar u a partir de u_1 e u_2.

(a) Resolvam a equação para u_1, depois de mostrar que a série adequada é

$$u_1(x,y) = \sum_{k>0} b_k(y) \sin\frac{\pi k x}{2}.$$

(b) Resolvam a equação para u_2, depois de mostrar que a série adequada é

$$u_2(x,y) = \sum_{k>0} b_k(x) \sin(\pi k y).$$

(c) Verifiquem que $u_1 + u_2$ satisfaz as condições de fronteira de u e determinem u.

(7.33) *Exercício.* Considerem a EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

onde $u(x,y)$ está definida para $0 \le x \le 2\pi$ e $0 \le y \le \pi$. Em cada alínea, encontrem a solução satisfazendo as condições indicadas.

(a) $u(x,0) = 3\sin(2x)$, $u(x,\pi) = 3e^{2\pi}\sin(2x)$, $u(0,y) = \sin y$, $u(2\pi,y) = e^{-2\pi}\sin y$;

(b) $u(x,0) = -e^{-4\pi}\cos(4x)$, $u(x,\pi) = -\cos(4x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,y) = 0$;

(c) $u(x,0) = u(x,\pi) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \sin(2y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,y) = e^{4\pi}\sin(2y)$;

(d) $u(x,0) = 0$, $u(x,\pi) = (e^{2\pi} - 1)\cos x$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \sin(2y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,y) = e^{4\pi}\sin(2y)$;

(e) $u(x,0) = 0$, $u(x,\pi) = 3(e^{\pi} - 1)\cos(x/2)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,y) = 0$;

(f) $u(x,0) = 0$, $u(x,\pi) = x - \pi$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,y) = 0$;

(g) $u(x,0) = 1$, $u(x,\pi) = 0$, $u(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,y) = 0$.

(7.34) *Exercício.* Consideramos agora, para uma constante λ, a EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u,$$

com condições de fronteira $u(x,0) = u(x,2) = u(0,y) = u(\pi,y) = 0$, onde $0 \le x \le \pi$ e $0 \le y \le 2$. Mostrem que se $u \ne 0$, então $\lambda = -k^2 - \frac{\pi^2}{4}\ell^2$, onde k e ℓ são inteiros positivos, e u é um múltiplo de $x, y \mapsto \sin(kx)\sin\frac{\ell\pi y}{2}$.

(7.35) RESPOSTAS DE EXERCÍCIOS.

(7.4) (a) $\cos x + xy^2 + 1$. (b) $e^{2x} + x^2 + y$. (c) $-\frac{1}{2}\cos y + \frac{3}{2}e^{2x}\cos y$. (d) $4x^2 - xy + y^2$. (e) $(e^x/y) + 3x$. (f) $-y\cos\sqrt{x}$.

(7.6) (a) $x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{4}y^2$. (b) $e^{2y}\left(x - \frac{3}{2}y\right)$. (c) $e^{y^2/4}\left(x - \frac{3}{2}y\right)$. (d) $x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}xy - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{6}y^3$.

(7.8) (a) $x^2 + y + e^{2x}y + 1$. (b) $xy + e^{2x}y$. (c) $xy - \frac{1}{3}x^3$. (d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - 2xy + 1$. (e) $\exp(\frac{1}{2}x^2 + y)$. (f) $\frac{1}{2}x^2 - 2\sin x + y$. (g) $x + (y - \sin x)^2$. (h) $2\sin x\, e^x - 2ye^x$. (i) $\sin x + \cos\big(y/(1+x^2)\big)$.

(7.11) (a) $t \mapsto (x_0 e^t, -e^t)$. $\mathbb{R}$. (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$. não. (c) x.

(7.12) (a) $t \mapsto (x_0\cos t, x_0\sin t)$. $\mathbb{R}$. (b) xy. (c) $u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \theta$ se $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$. não.

(7.21) (a) $e^{4t}\sin x$. (b) $3e^{4t}\sin x + e^t\sin(2x)$. (c) $e^{19t/4}\sin(x/2)$. (d) $\sum_{\substack{n>0\\ n \text{ ímpar}}} \frac{4n/\pi}{n^2-4} e^{(5-\frac{n^2}{4})t}\sin\frac{nx}{2}$.
(e) $\sum_{n>0} -4\frac{(-1)^n}{n} e^{(5-\frac{n^2}{4})t}\sin\frac{nx}{2}$. (f) $3e^t\cos(2x)$.
(g) $\sum_{\substack{n>0\\ n \text{ ímpar}}} -\frac{8/\pi}{n^2-4} e^{(5-\frac{n^2}{4})t}\cos\frac{nx}{2}$.
(h) $\pi e^{5t} + \sum_{\substack{n>0\\ n \text{ ímpar}}} -\frac{8}{\pi n^2} e^{(5-\frac{n^2}{4})t}\cos\frac{nx}{2}$.
(i) $\frac{1}{2\pi}e^{5t} + \sum_{n>0} \frac{2}{\pi n}\sin\frac{n}{2}\, e^{(5-\frac{n^2}{4})t}\cos\frac{nx}{2}$.
(j) $\sum_{\substack{n>0\\ n \text{ ímpar}}} \frac{32/\pi}{n^2-64}\sin\frac{\pi n}{2}\, e^{(5-\frac{n^2}{16})t}\sin\frac{nx}{4}$.
(k) $\sum_{\substack{n>0\\ n \text{ ímpar}}} \left(\frac{96/\pi}{n^2-64}\sin\frac{\pi n}{2} - \frac{20n/\pi}{n^2-256}\right) e^{(5-\frac{n^2}{16})t}\sin\frac{nx}{4}$.
(l) $\sum_{\substack{n>0\\ n \text{ ímpar}}} \frac{16}{\pi n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\, e^{(5-\frac{n^2}{16})t}\sin\frac{nx}{4}$.
(m) $\sum_{\substack{n>0\\ n \text{ ímpar}}} \frac{4}{\pi n} e^{(5-\frac{n^2}{16})t}\sin\frac{nx}{4}$.
(n) $\sum_{\substack{n>0\\ n \text{ ímpar}}} \frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\, e^{(5-\frac{n^2}{16})t}\cos\frac{nx}{4}$.
(o) $\sum_{\substack{n>0\\ n \text{ ímpar}}} \left(\frac{4n/\pi}{n^2-64} + \frac{20n/\pi}{n^2-256}\right)\sin\frac{\pi n}{2}\, e^{(5-\frac{n^2}{16})t}\cos\frac{nx}{4}$.
(p) $\sum_{\substack{n>0\\ n \text{ ímpar}}} \frac{4n/\pi}{n^2-144}\sin\frac{\pi n}{2}\, e^{(5-\frac{n^2}{16})t}\cos\frac{nx}{4}$.

(7.22) $\sum_{n\geq 0} e^{5t-n^2t^4} a_n(0)\cos(2nx)$. $\pi e^{5t} - e^{1+5t-t^4}\cos(2x)$.

(7.23) (a) $e^{1-\cos t-2t}\sin\frac{x}{2}$. (b) $\frac{3}{t+3}e^{-t^2}\sin\frac{x}{2}$. (c) $e^{3t/4}\sin\frac{x}{2} - t\,\sin x$.

(7.25) (c) $b_1(0) = 1$; $b_2(0) = -3$; $b_2'(0) = 4$. (d) $b_1(t) = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}\right)$; $b_2(t) = 4\sin t - 3\cos t$. (e) $\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}\right)\sin x + (4\sin t - 3\cos t)\sin(2x)$.

(7.26) $(2+3t)\sin(2x) - 3\cos(\sqrt{5}\,t)\sin(3x) + 4\cos(\sqrt{12}\,t)\sin(4x)$.

(7.27) (a) $3\sin x\,\cos(3t) + \sin(2x)\cos(6t)$. (b) $\frac{2}{3}\sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{3t}{2}$. (c) $3\sin x\,\cos(3t) + \sin(2x)\cos(6t) + \frac{2}{3}\sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{3t}{2}$.
(d) $\sum_{n>0} -4\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{nx}{2}\,\cos\frac{3nt}{2}$.
(e) $\frac{1}{2}\cos(2x)\sin(6t)$. (f) πt. (g) $\cos x\,\cos(3t) + \pi t - \sum_{\substack{n>0\\ n \text{ ímpar}}} \frac{16}{3\pi n^3}\cos\frac{nx}{2}\,\sin\frac{3nt}{2}$.
(h) $\sin\frac{x}{4}\,\sin\frac{3t}{4} + \sin\frac{3x}{4}\,\cos\frac{9t}{4}$.
(i) $\sum_{\substack{n>0\\ n \text{ ímpar}}} \frac{16}{3\pi n^2}\sin\frac{nx}{4}\,\sin\frac{3nt}{4}$.
(j) $-6\cos\frac{x}{4}\,\cos\frac{3t}{4}$. (k) $-8\cos\frac{x}{4}\,\sin\frac{3t}{4}$.
(l) $-6\cos\frac{x}{4}\,\cos\frac{3t}{4} - 8\cos\frac{x}{4}\,\sin\frac{3t}{4}$.

(7.28) $\sin(3x)\cos(3t) + \cos x\,\sin(2t)$.

(7.29) (a) $\ell = n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$. (b) $A\cos(\ell ct)\sin(\ell x) = \frac{A}{2}\sin(\ell ct + \ell x) - \frac{A}{2}\sin(\ell ct - \ell x)$. (c) $\frac{B}{\ell c}\sin(\ell ct)\sin(\ell x) = \frac{B}{2\ell c}\cos(\ell ct - \ell x) - \frac{B}{2\ell c}\cos(\ell ct + \ell x)$.
(d) $\sum_{n>0}\left(A_n\cos(n\pi ct) + \frac{B_n}{n\pi c}\sin(n\pi ct)\right)\sin(n\pi x)$.

(7.30) (a) $t = \frac{b-a}{2c}$; $x = \frac{a+b}{2}$; $u\left(\frac{b-a}{2c}, \frac{a+b}{2}\right)$.

(7.32) (a) $e^{\pi y}\sin(\pi x) - e^{-\pi y}\sin(\pi x)$. (b) $3e^{\pi-\pi x}\sin(\pi y)$. (c) $e^{\pi y}\sin(\pi x) - e^{-\pi y}\sin(\pi x) + 3e^{\pi-\pi x}\sin(\pi y)$.

(7.33) (a) $3e^{2y}\sin(2x) + e^{-x}\sin y$. (b) $-e^{4y-4\pi}\cos(4x)$. (c) $\frac{1}{2}e^{2x}\sin(2y)$.
(d) $e^{\pi+y}\cos x - e^{\pi-y}\cos x + \frac{1}{2}e^{2x}\sin(2y)$.
(e) $3e^{\pi/2}\left(e^{y/2} - e^{-y/2}\right)\cos(x/2)$.
(f) $\sum_{\substack{n>0\\ n \text{ ímpar}}} -\frac{8}{\pi n^2}\frac{\exp(ny/2)-\exp(-ny/2)}{\exp(n\pi/2)-\exp(-n\pi/2)}\cos\frac{nx}{2}$.
(g) $\sum_{\substack{n>0\\ n \text{ ímpar}}} \frac{4}{\pi n}\frac{\exp(n(\pi-y)/4)-\exp(n(y-\pi)/4)}{\exp(n\pi/4)-\exp(-n\pi/4)}\sin\frac{nx}{4}$.